

DOI: 10.37614/2588-0039.2020.43.007

ЧИСЛЕННАЯ ЭМПИРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА В ИОНОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

В.М. Уваров

Санкт - Петербургский государственный университет путей сообщения

Аннотация

В основе предлагаемой эмпирической модели лежит краевая задача, которая исключает влияние на рассчитываемые распределения потенциала со стороны вихревой составляющей электрических полей. Последняя обусловлена флуктуациями, ограниченностью точности измерений E и способом отбора экспериментальных данных для эмпирического моделирования.

Введение

Прямые измерения электрических полей в ионосфере Земли проводятся на протяжении многих десятилетий. Накоплен большой объем данных, полученных с помощью наземных установок и космических аппаратов. Эти данные используются как для апробации детерминированных моделей электрических полей, т.е. моделей основанных на решении краевых задач с задаваемыми источниками, так и для построения эмпирических моделей.

Что касается детерминированных моделей электрических полей, то их разнообразие, обусловленное разнообразием постановок задач, лежащих в их основе, и, отчасти, разнообразием методов их решения, подразумевает и разнообразие воспроизводимых ими пространственных распределений ионосферных электрических полей. Для заданной гелио-геофизической ситуации, которой соответствует единственное наблюдаемое распределение полей, эти разные модели воспроизведут разные распределения. Это обстоятельство является одной из причин постановки вопроса о корректности существующих детерминированных моделей, точнее, корректности постановки их краевых задач.

Эта проблема подробно обсуждалась в [1]. Там, в частности, представлены результаты двух численных моделей глобального распределения электрических полей в ионосфере Земли, отличающихся только методом численного решения. В основе этих моделей лежит опубликованная ещё в 1981 году краевая задача [2], учитывающая специфику электродинамического взаимодействия токнесущих ионосферных оболочек противоположных полушарий. Как отмечено в [1] игнорирование этой специфики в других численных моделях ионосферных электрических полей делает эти модели неактуальными.

Таким образом, дальнейшее развитие детерминированных моделей ионосферных электрических полей возможно только на основе корректно поставленной краевой задачи и современного численного метода её решения. Например, в модифицированной численной модели [3] использовался современный вариационно-разностный метод, основанный на концепции обобщенного решения. Такой метод позволяет учесть даже разрывы в проводимости на границах каналов, имитирующих локализацию полярных сияний.

Развитие детерминированных моделей сдерживается отсутствием современных, доступных и удобных при использовании моделей источника, в частности, моделей распределения продольных токов, являющихся главным источником генерации электрических полей в высоких широтах.

По этой причине является актуальным развитие эмпирических моделей электрических полей, использующих непосредственно данные их измерений. Если разнообразие существующих детерминированных моделей отражает отмеченное выше разнообразие ошибок в формулировках соответствующих краевых задач, то причина огромного разнообразия существующих эмпирических моделей отражает не только разнообразие заблуждений, но и то обстоятельство, что эта прикладная проблема ещё не нашла должного места в вычислительной математике и является во многом искусством точно так же как искусством называют иногда даже асимптотические разложения.

Например, в работе Веймера [4] распределение потенциала в полярной шапке представлено весьма коротким рядом сферических гармоник, коэффициенты которых рассчитываются методом наименьших квадратов с использованием данных спутника DE-2 с полярной орбитой. А позже [5], на основе этих же данных «развита улучшенная техника для эмпирического моделирования» с выделением в шапке 34-х кольцевых областей с разложением потенциала в ряд Фурье только по азимутальной переменной в каждой из них. Тем не менее, в обеих работах [4, 5], как отмечает автор, «электрические потенциалы получались вдоль пролета спутника интегрированием поля вдоль направления движения».

Фактор вихревых полей в эмпирическом моделировании

Метод расчета потенциала в работах [4, 5] заключается в следующем. Задавался нулевой потенциал в выбранной опорной точке (точнее, на всей границе шапки!) и далее потенциал рассчитывался в других точках непосредственным интегрированием вдоль траектории спутника касательной компоненты электрического поля из исходного набора данных измерений, более или менее плотно покрывающих полярную шапку.

Очевидно, что данный метод расчета потенциала корректен, если исходный набор данных действительно представляет потенциальные электрические поля. Однако, в силу ряда причин это не совсем так. И возникает необходимость исключения вихревой составляющей.

Дело не только и не столько в том, что согласно установившемуся при эмпирическом моделировании мнению реальные вихревые поля, обусловленные нестационарными магнитными полями, достаточно малы по сравнению с потенциальными. Дело в том, что даже в идеальном случае, когда измерения на сети измерительных станций были бы проведены синхронно, в отсутствие возмущений геомагнитного поля, и полученный набор данных отражал бы мгновенную пространственную картину распределения потенциальных электрических полей, реальные флуктуации напряженности \mathbf{E} и обусловленные ограниченностью точности измерений приборные флуктуации, характерные для каждого пункта наблюдений, привели бы к появлению искусственной завихренности в рассматриваемой двумерной картине поля. Циркуляция электрического поля по произвольно выбранному замкнутому контуру в пределах рассматриваемой области, которая, как известно, должна быть равна нулю, при расчетах с использованием реальных данных измерений \mathbf{E} будет отличной от нуля. Действительно, измеренное поле \mathbf{E} является суммой потенциального ионосферного поля \mathbf{E}_p и суммарного хаотического поля флуктуаций \mathbf{E}_f .

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_f. \quad (1)$$

В силу хаотичности естественно полагать, что \mathbf{E}_f имеет две составляющие – потенциальную \mathbf{E}_{fp} и вихревую \mathbf{E}_{fc} :

$$\mathbf{E}_f = \mathbf{E}_{fp} + \mathbf{E}_{fc}, \quad (2)$$

что и объясняет ненулевую циркуляцию \mathbf{E} .

Другая причина завихренности, свойственная используемому набору данных измерений \mathbf{E} , заключается в том, что этот набор, как правило, не отражает мгновенную пространственную картину распределения \mathbf{E} . Например, в [5] при построении эмпирических распределений потенциала для некоторой гелио-геофизической ситуации в северной полярной шапке автор был вынужден привлечь данные измерений \mathbf{E} в южной полярной шапке с единственной целью – пополнить весьма скудный набор исходных данных хотя бы и таким образом. Очевидно, что в данном случае вклад хаотической составляющей \mathbf{E}_f в поле \mathbf{E} увеличится. Следовательно, ещё одной причиной обсуждаемой завихренности является способ отбора исходных экспериментальных данных.

Таким образом, использование набора исходных данных измерений электрических полей содержит искусственное хаотическое поле, которое может существенно исказить воспроизведение эмпирическими моделями двумерных картин распределения потенциала.

Используемый в [4, 5] метод расчета потенциала в произвольной точке исследуемой области основан на использовании известного соотношения между потенциалом U и напряженностью \mathbf{E}_p потенциального электрического поля:

$$U_2 = U_1 - \int \mathbf{E}_{pl} dl, \quad (3)$$

где \mathbf{E}_{pl} – касательная к элементу контура dl составляющая вектора \mathbf{E}_p , а интегрирование можно выполнять по любому контуру, соединяющему две произвольные точки 1 и 2.

Выбирая опорную точку 1 и задавая в ней нулевое значение потенциала, автор работ [4, 5] на основе соотношения (3) рассчитал значения потенциала в ряде точек на траекториях спутника, более или менее плотно покрывающих полярную шапку. Однако, соотношение (3) выполняется только для потенциальных полей. Поэтому метод [4, 5], связанный с подстановкой в (3) поля \mathbf{E} из массива отобранных данных измерений, содержащих хаотическое поле \mathbf{E}_f , очевидно приводит к ошибке в расчете потенциала

$$U_2 = U_1 - \int \mathbf{E}_{pl} dl - \int \mathbf{E}_{fl} dl, \quad (4)$$

где последнее слагаемое в правой части и представляет эту ошибку, которую с учетом (2) можно представить в виде:

$$\int \mathbf{E}_{fl} dl = U_{f1} - U_{f2} + \int \mathbf{E}_{fc1} dl. \quad (5)$$

В правой части (5) последнее слагаемое в виде интеграла обусловлено вкладом вихревой составляющей хаотического поля \mathbf{E}_{fc} , а разность потенциалов – вкладом потенциальной составляющей \mathbf{E}_{fp} .

Полное устранение ошибки (5) при расчете потенциала методом прямого интегрирования, используемым в [4, 5], невозможно, но можно существенно уменьшить эту ошибку. Ниже предложен метод, основанный на решении краевой задачи, который позволяет это сделать.

Метод построения численной эмпирической модели

Согласно (1), (2) электрическое поле из набора отобранных данных для построения двумерной картины эквипотенциалей состоит из истинного потенциального поля E_p , генерируемого в ионосфере, и хаотического поля, представленного потенциальной E_{fp} и вихревой E_{fc} его частью:

$$E = E_p + E_{fp} + E_{fc}. \quad (6)$$

Поскольку первые два слагаемых в правой части (6) потенциальны, их сумма может быть представлена в виде:

$$E_p + E_{fp} = -\text{grad}U. \quad (7)$$

Тогда (6) имеет вид:

$$E = -\text{grad}U + E_{fc}. \quad (8)$$

Поскольку поле E_{fc} вихревое, применив операцию дивергенция к (8), имеем:

$$\Delta_{\theta,\varphi}U = -\text{div}_{\theta,\varphi}E. \quad (9)$$

В (9) левые и правые части – это угловая часть оператора Лапласа и угловая часть оператора дивергенция, соответственно, U – электрический потенциал, обусловленный согласно (7) как генерируемым в ионосфере потенциальным электрическим полем, так и потенциальной составляющей поля флуктуаций, E – электрическое поле, задаваемое по данным измерений.

Двумерное эллиптическое уравнение (9), рассматриваемое в некоторой области Ω с границей Γ , необходимо дополнить граничными условиями. Естественными граничными условиями здесь являются условия Неймана:

$$\partial U / \partial n = -E_n, \quad (10)$$

где E_n – нормальная к границе Γ компонента E .

Строго говоря, поскольку потенциал U определен соотношением (7), то в правой части (10) вместо измеряемой величины E_n следовало бы подставить, принимая во внимание (6), нормальную компоненту разности $E - E_{fc}$. Однако, это невозможно, поскольку в этой разности малая величина E_{fc} неизвестна. Тем не менее, если $E_{fc} = 0$, то граничное условие (10) абсолютно корректно. В ином случае остается только пренебречь вихревой составляющей E_{fc} суммарного хаотического поля, полагая, что она мала по сравнению с измеряемым полем E .

Краевая задача (9), (10) описывает двумерное распределение электрического потенциала при использовании данных измерений напряженности E ионосферных электрических полей для задания источника задачи (правых частей (9), (10)). Это описание тем точнее, чем полнее исходный набор этих данных, что во многом определяется, в частности, плотностью наземной сети измерительных приборов или (и) численностью спутниковой группировки и длительностью периода спутниковых наблюдений.

Особенностью краевой задачи (9), (10) является вырожденность, в том смысле, что её решение определяется с точностью до константы. Тем не менее, корректная реализация численного решения этой задачи с поиском решения в области Ω в классе функций, ортогональных единице, дает единственное решение.

Оператор уравнения (9) в виде угловой части оператора Лапласа является самосопряженным, что существенно упрощает разработку алгоритма численного решения краевой задачи (9), (10). Два численных метода решения вырожденной краевой задачи подробно описаны в [1, 3] для более сложного случая оператора вида $\text{div}_{\theta,\varphi}(-\Sigma \cdot \text{grad}U)$, где Σ – тензор проводимости. Если Σ представлен единичной матрицей, то этот оператор совпадает с угловой частью оператора Лапласа, и указанные методы можно использовать при разработке алгоритма численного решения задачи (9), (10). Основная проблема, с вычислительной точки зрения, связана с расчетом правой части уравнения (9). Дело в том, что для того, чтобы не ухудшить точность используемого численного метода необходимо выбирать сетку с постоянным шагом по долготе и широте, в узлы которой, вообще говоря, не попадают значения компонента напряженности E из исходного набора экспериментальных данных, будь то спутниковые или даже наземные измерения. По этой причине возникает проблема сноса значений компонент поля E из ближайших наблюдательных точек в узлы используемой сетки. Возможный вариант решения проблемы – поиск (или разработка) современного метода интерполирования.

Аналогичные замечания относятся и к заданию правой части краевого условия (10).

Конфигурация и размеры области Ω и её границы Γ в различных прикладных задачах могут быть самыми разными – от полярной шапки до площадки, занимаемой измерительным полигоном. С вычислительной точки зрения этот фактор не должен вызывать принципиальных затруднений.

Заключение

Как отмечалось выше, набор исходных экспериментальных данных, используемых для воспроизведения двумерных распределений электрического потенциала в рамках тех или иных эмпирических моделей ионосферных электрических полей содержит вклад хаотических вихревых полей, обусловленных как самой природой измерений, с присущими им флуктуациями, так и спецификой отбора исходных данных.

Предложенный в настоящей работе метод построения численной эмпирической модели исключает влияние этих полей на расчет потенциала. Это достигается за счет того, что сформулированная краевая задача для распределения потенциала, лежащая в основе метода, в качестве источника содержит дивергенцию наблюдаемых полей, что по определению отсекает любую вихревую составляющую поля.

Несмотря на вырожденность краевой задачи, модель воспроизводит единственное пространственное распределение потенциала.

При разработке алгоритма численного решения краевой задачи можно использовать, как частный случай, ранее разработанные численные методы решения краевых задач с более сложными несамосопряженными операторами.

Сопоставляя предлагаемый метод построения эмпирической модели с моделями [4, 5] отметим, что он не содержит ничем не обоснованного условия обнуления потенциала на всей границе области, существенно искажающего решение.

Кроме того, предложенный метод не нуждается в разложении по сферическим гармоникам, использование которого в [4, 5] (и огромном количестве других работ) обнаружило ряд существенных недостатков. Среди них – невозможность воспроизвести большие электрические поля; невозможность воспроизводить резкие обращения конвекции; неограниченный рост решения в областях, плохо покрытых данными измерений, при увеличении степени и порядка полиномов; появление «статистических шумов» при учете более высоких гармоник и сглаживание решения в их отсутствие [4, 5].

Литература

1. Уваров В.М., Самокиш Б.А. Электрические поля в ионосфере Земли. Численные модели // Монография. СПб. ПГУПС. 2009. С. 62.
2. Уваров В.М. Возможный подход к проблеме возбуждения электрических полей и токов, обусловленных V_y -компонентой ММП // Геомагнетизм и аэрономия. 1981. Т. 21. № 1. С. 114-120.
3. Кондаков А.Б., Самокиш Б.А., Уваров В.М. Модифицированная численная модель глобального распределения электрического потенциала в ионосфере Земли. UT-эффект обращения ионосферной конвекции // Геомагнетизм и аэрономия. 2000. Т. 40. № 3. С. 100-110.
4. Weimer D.R. Models of high-latitude electric potentials derived with a least error fit of spherical harmonic coefficients // J. Geophys. Res. 1995. V. 100. No. A10. P. 19595 – 19607.
5. Weimer D.R. Improved ionospheric electrodynamic models and application to calculating Joule heating rates // J. Geophys. Res. 2005. V. 110. No. A5. A05306. doi:10.1029/2004JA010884