"Physics of Auroral Phenomena", Proc. XXXVIII Annual Seminar, Apatity, pp. 153-156, 2015

Polar Geophysical Institute

МЕТОД ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ИОНОСФЕРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Д.Б. Рождественский[1], В.А. Телегин[2]

[1]*Институт проблем управления РАН, e-mail: rd_41@ipu.ru*
[2]*Институт магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн РАН;*
e-mail:telvika@gmail.com:

Аннотация. Предложен метод прогнозирования данных наблюдения геофизических процессов, имеющих ограниченный спектр и заданных на конечном временном интервале. Метод прогнозирования - экстраполяции получен в результате решения задачи аппроксимации разрывных функций с использованием амплитудной демодуляции гармонического сигнала. Метод предназначен для прогнозирования состояния возмущенной ионосферы по данным вертикального зондирования.

1.Введение

В геофизике основными методами прогнозирования считаются методы регрессионного анализа, в основу которого в качестве модели принят степенной многочлен невысокой степени. Существенная часть ионосферных наблюдений представлена дискретными во времени и пространстве измерениями ионосферных параметров, дальнейшая обработка которых проводится с помощью численных цифровых технологий. В настоящей работе рассматриваются принципиальные трудности, связанные с получением алгоритма прогнозирования дискретных данных наблюдений, исследование которых проводится методами гармонического анализа.

2. Принципиальные трудности прогнозирования

Постановка задачи прогнозирования заключается в построении оператора формирования выборки конечного числа дискретных отсчетов, подвергающихся операции прогнозирования.

Прогнозированию подвергаются только результаты наблюдения, представленные в виде конечного числа дискретных отсчетов. Прогнозирование всегда связано с решением задачи аппроксимации разрывных функций, которая сопровождается явлением Гиббса, фатально сказывающимся на результаты прогноза. Именно поэтому методы математического моделирования не дают хороших результатов в прогнозе.

Реальный процесс с достаточной точностью может быть представлен суперпозицией гармонических составляющих без каких-либо ограничений ее спектрального состава:

$$y(t) = \sum_{n}^{N} c_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \tag{1}$$

Здесь c_n – амплитуда, ω_n –круговая частота, φ_n – начальная фаза, *n* – номер гармоники. Будем полагать, что реальный процесс с достаточной точностью может быть представлен выражением (1) при конечном значении *n*, т.е. процессом с ограниченным спектром. Результаты наблюдений можно представить процессом с ограниченным спектром, умноженным на прямоугольную функцию и подвергнутым равномерной дискретизации.

В качестве алгоритма прогнозирования выберем ряд Тейлора, позволяющий записать значения функции $f(t)$ через ее значения при других значениях аргумента t_0.

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f^{(1)}(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{f^{(2)}(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \ldots \tag{2}$$

Если t_0 является текущей точкой, то ряд (2) служит для определения экстраполированных значений функции $f(t)$ в области $t > t_0$. Функция может быть разложена в ряд Тейлора, если она непрерывна и непрерывны ее производные в окрестности точки t_0 [*Фихтенгольц,* 2007]. Условие разложения произвольной функции $f(t)$ в ряд Тейлора является условием экстраполируемости этой функции. Функция экстраполируема, если она определена и имеет производные всех порядков в окрестности точки t_0 и на всей области экстраполяции. Условие дифференцируемости функции требует ее непрерывности. Следовательно, функцию, представленную в виде дискретных отсчетов (каковыми являются данные ионосферного зондирования) необходимо восстановить в непрерывный вид или, другими словами провести интерполяцию либо аппроксимацию.

При аппроксимации функций, представляемых дискретными отсчетами, колебания Гиббса возникают на частоте Найквиста, проходят через все отсчеты и, по-существу, являются погрешностями аппроксимации, а в области экстраполяции ведут себя непредсказуемо.

Алгоритм восстановления дискретного процесса с помощью ряда Котельникова, полученный в результате аппроксимации разрывной функции, имеет вид:

$$\tilde{y}(d) = \frac{\sum_{n=-N}^{N} y(n) b_n \frac{\sin \pi (d-n)}{d-n}}{\sum_{n=-(m-1)}^{m-1} b_n \frac{\sin \pi (d-n)}{d-n}}, \tag{3}$$

где $\tilde{y}(d)$ – результат аппроксимации, $y(n)$ – отсчеты исходного процесса, $d = \frac{t}{\Delta t}$ – безразмерное время, Δt – интервал дискретизации, b_n – коэффициенты взвешивания.

3. Метод экстраполяции

Выражение (3) получено с помощью интегрального дискретного преобразования Фурье предельным переходом от ДПФ при стремлении к бесконечности периода дискретной периодической функции $y(n)$. Интегральное ДПФ известно как ряд Котельникова, Шеннона, Найквиста или кардинальный ряд Уиттекера. Базисная функция Котельникова $\frac{\sin \pi (d-n)}{d-n}$ проходит через отсчеты функции $y(n)$, поэтому выражение (3) является интерполирующей функцией. Функция $\tilde{y}(d)$ дифференцируема относительно *d*. Взяв производную по *d* от функции $\tilde{y}(d)$, получим алгоритм для расчета производной дискретной функции.

$$\tilde{y}(m) = [y(n) - y(m)] \frac{b_n}{b_m (m-n)} (-1)^{(n-m)}, \tag{4}$$

где $\tilde{y}(m)$ - точка, в которой определяется производная.

Из выражения (3) непосредственно следует алгоритм экстраполяции для узловых точек, лежащих в области будущего времени:

$$\tilde{y}(d) = \frac{\sum_{n=-N}^{N} y(n) \frac{b_n (-1)^{d-n}}{d-n}}{\sum_{n=-N}^{N} \frac{b_n (-1)^{d-n}}{d-n}} . \tag{5}$$

С помощью выражений (4) и формулы разложения функции в ряд Тейлора (2) получим алгоритм экстраполяции дискретного процесса $y(n)$.

Таким образом, метод аппроксимации разрывной функции, основанный на амплитудной демодуляции, позволил построить алгоритм экстраполяции конечной выборки дискретных отсчетов ограниченного по спектру реального геофизического процесса.

В качестве примера работы алгоритмов прогнозирования (2) и (5) приведем результаты прогноза функций с ограниченными спектрами: $y(t) = \sin wt$ и $y(t) = \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2$

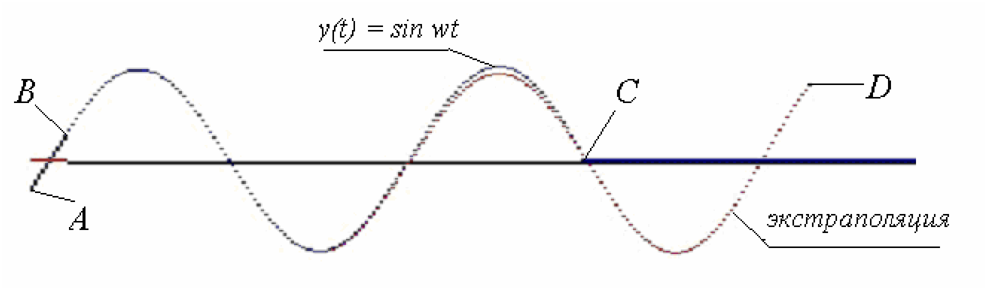

Рисунок 1. Экстраполяция функции $y(t) = \sin wt$ по алгоритму (2). AB- отсчеты исходного процесса; AC –точные значения функции; *BD* – результаты экстраполяции;

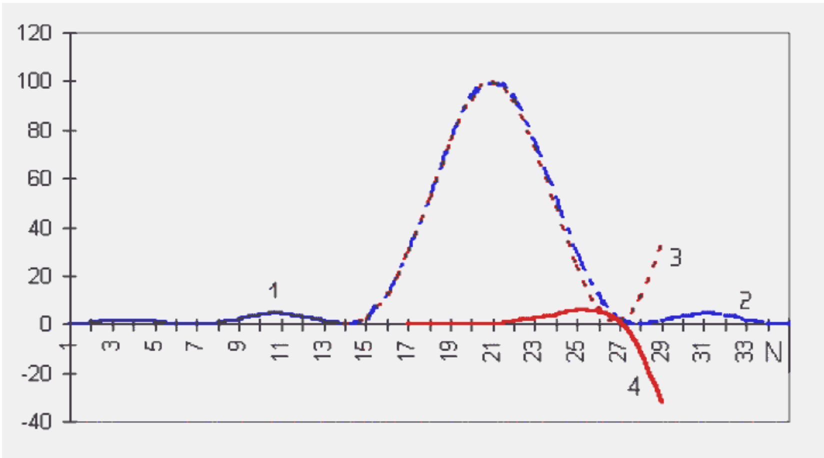

Рисунок 2. Экстраполяция функции $y(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$ с ограниченным сплошным спектром по алгоритму (5): *N*- номер отсчета, кривая *1* – отсчеты исходного процесса; участок *N*>14 – область экстраполяции; *2* – точные значения функции; *3* – результаты экстраполяции; *4* –ошибки экстраполяции.

4. Результаты прогноза

Применение изложенного выше метода к данным ионосферного зондирования позволяет получить прогноз суточного хода критических частот слоя F2. На рис. 3 представлены результаты прогнозирования изменения f_0F2 для интервала экстраполяции, равного двум суткам.

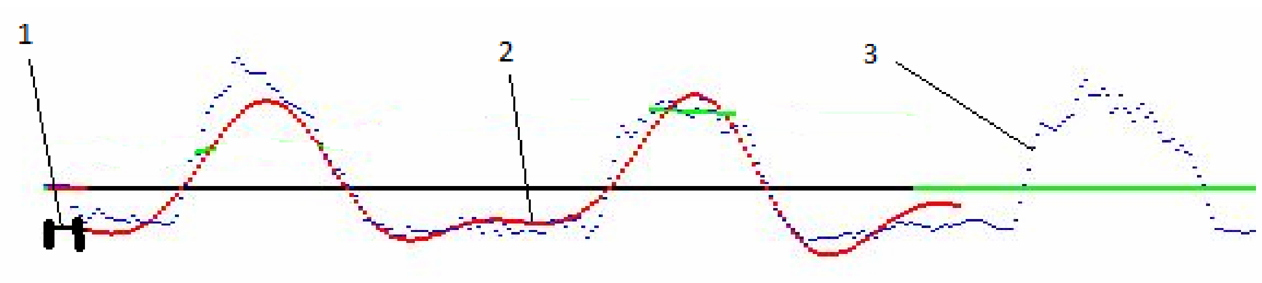

Рисунок 3. Пример работы алгоритма экстраполяции для суточного хода критической частоты слоя F2.
1 – интервал исходных данных, поступающих на алгоритм экстраполяции, 2 – результат экстраполяции (гладкая кривая), 3 – исходные измеренные данные критической частоты (точечная кривая).

На рис. 3 показана экстраполяция длительностью в 48 часов (кривая 2) на основе исходных данных с интервалом в 3 часа (кривая 1).

5. Заключение

В настоящей статье изложен метод прогнозирования, позволяющий уменьшить степень неопределенности, обусловленной явлением Гиббса. Наиболее сложный вопрос о механизме переноса информации в область будущего времени. Основой для получения алгоритма прогнозирования является выражение (4), из которого получено (5) для узловых точек в области будущего. В этих выражениях аргумент лежит в области $-\infty \prec d \prec +\infty$, в том числе и в области будущего времени. В выражении (4) числитель и знаменатель содержат колебания Гиббса, которые являются суперпозицией «хвостов» базиса Котельникова $\left(\frac{\sin x}{x}\right)$. Таким образом, информация переносится в область будущего колебаниями Гиббса.

Решение задачи прогнозирования заключается в построении обратного оператора, позволяющего решить задачу аппроксимации разрывных функций и задачу прогноза. Обратный оператор построен на использовании свойств симметричности спектра восстановленной дискретной последовательности с помощью интегрального преобразования Фурье. Симметричность спектра достигается взвешиванием дискретной последовательности посредством использования выделяющей функции с ограниченным спектром. Этот метод также имеет свои ограничения как любой приближенный численный метод. Например, нельзя создать выделяющую функцию с частотной характеристикой, у которой амплитуда боковых лепестков равна нулю. Точность экстраполяции определяется наличием этих боковых лепестков. Точность прогнозирования зависит от степени подавления боковых лепестков спектра выделяющей функции. Предлагаемый метод позволяет получать результаты прогнозирования с более высокой точностью, чем методами регрессионного анализа.

Описанный метод прогнозирования применяется для функций с ограниченным спектром, заданных на конечном временном интервале конечным числом равноудаленных дискретных отсчетов. Поскольку алгоритм экстраполяции требует ограниченности спектра прогнозируемого процесса и выделяющей функции, надо рассмотреть правила формирования функции с ограниченным спектром с помощью методов цифровой фильтрации, т.е. рассмотреть правила построения цифровых фильтров. На современном этапе в связи с отказом от использования системы GPS в России и с переходом на использование ГЛОНАСС стала актуальной задача исследования влияния ионосферы на точность определения координат подвижных объектов.

Литература

Андре Анго. Математика для электро-и радиоинженеров. М.: Наука. С. 770. 1964.

Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 408 с. 1965.

Котельников В.А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи. //Радиотехника, М., №4-5. С.42-55. 1999.

Мандрикова О.В., Глушкова Н.В., Живетьев И.В. Метод моделирования и прогнозирования ионосферных данных на основе совмещения вейвлет-преобразования и моделей авторегрессии - проинтегрированного скользящего среднего. *www..ikir.ru/en/Publications/Conferences/2013-VI-international/thesesAndReports/F_119-123.pdf* .

Моисеев С.Н. Вероятностная модель и прогноз частотных параметров ионосферного канала распространения. *www.dissercat.com/conntent/veroyatnostnye-modeli-i-prognoz-chastotnnykh-parametrov-ionosfernogo-kannnnnnnnala-rasprostraneniya/2002/.*

Полозов Ю.А. Автоматизированная обработка сигналов сложной структуры на основе нейронных сетей с целью прогноза сильных землетрясений на п-ве Камчатка. *www.kscnet.ru/ivs/publicationn/young_conf./2008/2/art12.pdf*

Рождественский Д.Б. Аппроксимация функции с разрывами. Явление Гиббса. // Промышленные АСУ и Контроллеры.. №4. С .32 – 36. 2011

Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х т.Т.1. М.: Физматлит. 680 с. 2007.

Хемминг Р.В. Численные методы. М.: Наука, С. 400. 1972.