

МЕТОДЫ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИОНОСФЕРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Д.Б. Рождественский¹, В.И. Рождественская², В.А. Телегин²

¹Институт проблем управления РАН, e-mail: rd_41@ipu.ru

²Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн РАН
e-mail: veraro2011@yandex.ru; telvika@gmail.com

Введение

При обработке данных, получаемых в ионосферной службе, особый интерес представляют вычисления средних значений по дням, средних значений суточного хода, сезонного и т.п. Известно, что в ионосферной службе для вычисления средних значений используют медианный скользящий фильтр как наиболее легко реализуемый прототип арифметического скользящего среднего.

В работе [Рождественский, Телегин, 2015] было показано, что прогнозируемый процесс должен с достаточной степенью неопределенности удовлетворять выражению $y(t) = \sum_n^N c_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$, где ω_n -

круговая частота, φ_n - начальная фаза, т.е. измеренные данные для успешного прогнозирования необходимо представить в виде, позволяющем избавиться от помех, способных свести на нет операцию прогнозирования. В связи с возросшим интересом к цифровой фильтрации и выбору идеального фильтра, процедуру определения средних значений считают идеальной и сравнивают с ней как с эталоном другие способы фильтрации. Выясним насколько цифровые фильтры скользящего осреднения (или равно взвешенных) обладают эффективностью и насколько эти фильтры способны бороться с неопределенностью, обусловленной явлением мимикрии частот. Необходимым условием применения алгоритма экстраполяции является ограниченность спектра исследуемого процесса. Выделяющая функция, как наиболее важный элемент алгоритма экстраполяции, строится из условия ограниченности спектрального состава. Формирование процессов и функций с ограниченным спектром осуществляется с помощью цифровых фильтров, причем, характеристики фильтров, предназначенные для задач прогнозирования, должны удовлетворять достаточно жестким требованиям к степени подавления в полосе среза, которым стандартные цифровые фильтры [Хэррис, 1978] не отвечают. Точность и величина интервала экстраполяции зависит от полосы прогнозируемого процесса: чем полоса уже, тем качество экстраполяции выше. Данные условия выдвигают определенные требования к гибкости синтеза цифровых фильтров, позволяющие строить цифровые фильтры с наперед заданными свойствами. Наиболее важной характеристикой цифрового фильтра, позволяющей получать на его выходе процессы с требуемыми свойствами, является его частотная характеристика (ЧХ).

Частотные характеристики взвешенного осреднения равноотстоящих отсчетов

Рассмотрим цифровой фильтр, осуществляющий взвешенное осреднение m отсчетов функции $y(t)$, взятых через интервал времени $\Delta\tau$:

$$\bar{y}(t) = C_0 y(t) + C_1 y(t - \Delta\tau) + \dots + C_{m-1} y[t - (m-1)\Delta\tau], \quad (1)$$

где C_0, C_1, \dots, C_{m-1} - весовые коэффициенты.

Результат осреднения $y(t)$, полученный в момент t , в силу физической реализуемости, относится к моменту $(t - \tau, \tau \geq 0)$, где τ - задержка.

Фильтр называется симметричным, если коэффициенты C_i удовлетворяют соотношениям $C_0 = C_{m-1}, C_1 = C_{m-2}, C_2 = C_{m-3}, \dots$ и момент $t - \tau$ расположен в середине интервала осреднения, т. е.

$\tau = \frac{m-1}{2} \Delta\tau$, мнимая ЧХ такого фильтра равна нулю. Введя $C_i = b_i$ и нормированную круговую частоту

$\alpha = \frac{\omega \Delta\tau}{2} = \pi f \Delta\tau$, получим весовые коэффициенты для нечетных m :

$$D(\alpha) = 2[b_{m-1} \cos(m-1)\alpha + b_{m-3} \cos(m-3)\alpha + \dots + b_2 \cos 2\alpha] + b_0 \quad (2)$$

для четных m :

$$D(\alpha) = 2[b_{m-1} \cos(m-1)\alpha + b_{m-3} \cos(m-3)\alpha + \dots + b_1 \cos \alpha] . \quad (3)$$

Тригонометрические суммы в правых частях выражений (2) и (3) являются разложениями в ряды Фурье частотной характеристики фильтра.

Для цифрового фильтра с равными весовыми коэффициентами имеем: $b_i = 1; i = 0, 1, \dots, m-1$. При этом результатом осреднения является среднее арифметическое отсчетов. Если отсчеты расположены симметрично относительно момента $t - \tau$, то, как следует из (2) и (3), действительная ЧХ такого фильтра определяется выражениями

$$D(\omega) = \frac{1}{m} \left[2 \cos(m-1) \frac{\omega \Delta \tau}{2} + 2 \cos(m-3) \frac{\omega \Delta \tau}{2} + \dots + 2 \cos \omega \Delta \tau + 1 \right], \text{ при нечетном } m,$$

$$D(\omega) = \frac{2}{m} \left[\cos(m-1) \frac{\omega \Delta \tau}{2} + \cos(m-3) \frac{\omega \Delta \tau}{2} + \dots + \cos \frac{\omega \Delta \tau}{2} \right], \text{ при четном } m. \quad (4)$$

Фильтры этого типа просто реализуются и широко применяются. Так, например, среднесуточные, месячные, годовые и другие величины могут считаться итогами фильтрации ряда равноотстоящих отсчетов. Однако относительная простота реализации таких фильтров сочетается с существенными их недостатками, сказывающимися на результатах фильтрации: недостаточное гашение в полосе среза; и наличие нежелательных полос пропускания, вызываемых периодичностью частотных характеристик. Улучшение характеристик в полосе среза может быть получено применением специальных цифровых фильтров с неравными весовыми коэффициентами.

Наличие нежелательных полос пропускания приводит к необходимости использовать цифровые фильтры в сочетании с аналоговыми, например датчиками с инерционными свойствами, либо специальными устройствами. Частотная характеристика равновзвешенного осреднения помимо главного лепестка (полезная полоса пропускания) имеет ряд паразитных полос пропускания, понижающих качество работы низкочастотного фильтра. Альтернативой фильтров средневзвешенного осреднения, для подавления нежелательных полос пропускания могут служить фильтры Чебышева. Желательно иметь фильтр, у которого полоса пропускания совпадает с основной полосой пропускания скользящего осреднения, а паразитные полосы отсутствуют. Такой фильтр называется фильтром исправленного непрерывного осреднения (ИНО). Его частотная характеристика есть произведение скользящего среднего и идеального фильтра низких частот. В наибольшей степени фильтру ИНО соответствуют фильтры Чебышева второго рода.

Чебышевские цифровые фильтры

Чебышевские фильтры используются в различных радиотехнических устройствах с частотно-избирательными свойствами и в вычислительной практике как симметричные цифровые фильтры, осуществляющие взвешенное осреднение равноотстоящих отсчетов. Метод вычисления весовых коэффициентов основан на использовании некоторых свойств полиномов Чебышева [Анго, 1964]. Полином Чебышева первого рода порядка n может быть представлен следующим образом:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad \text{при} \quad |x| \leq 1, \quad (5a)$$

$$T_n(x) = ch(n \operatorname{arch} x) \quad \text{при} \quad |x| > 1, \quad (5б)$$

Пока аргумент $x \in [-1, 1]$, (5a) может трактоваться как выражение косинуса кратного угла через косинус единичного, равного $\beta = \arccos x$ и лежащего в пределах $0 \leq \beta \leq \pi$, и, следовательно, $T_n(x) = \cos n\beta$.

Так как модуль косинуса любого угла не может превышать единицу, то график функции (5б) колеблется около нулевой линии, пересекает ее n раз и имеет $n-1$ экстремума с модулями, равными единице. Полином Чебышева первого порядка $T_1(x) = x$, так как $\cos \beta = x$.

Полиномы Чебышева старших порядков могут быть найдены рекуррентным соотношением $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$. Эта форма записи не требует ограничения модуля аргумента. Если модуль от нуля по сравнению с любым полиномом степени n , имеющим тот же коэффициент при старшем члене. Иными словами, полиномы Чебышева являются наилучшим приближением к нулю при аргументе $-1 \leq x \leq 1$. При этом отклонение функции $T_n(x)$ от другой функции $g(x)$ измеряется по максимуму модуля отклонения на этом отрезке т.е. величиной $\max |T_n(x) - g(x)| - 1 \leq x \leq 1$.

Это уникальное свойство используется для построения фильтров. Заметим, что, прежде всего, Полином Чебышева представляет собой полином относительно $x = \cos \beta$, содержащий либо четные, либо нечетные степени x , в соответствие с четностью старшего члена; ДЧХ симметричного фильтра, также представима в виде полинома относительно $\cos \alpha$, имеющего те же свойства четности.

$$D(\alpha) = 2[b_{m-1} \cos(m-1)\alpha + b_{m-3} \cos(m-3)\alpha + \dots + b_2 \cos 2\alpha] + b_0, \text{ для нечетных } m,$$

$$D(\alpha) = 2[b_{m-1} \cos(m-1)\alpha + b_{m-3} \cos(m-3)\alpha + \dots + b_1 \cos \alpha], \text{ для четных } m.$$

Проведем преобразование на оси частот, так чтобы участку среза действительной ЧХ фильтра соответствовала область приближения полинома Чебышева к нулю, а участку пропускания – область $|x| > 1$. Эти требования будут удовлетворены, если весовые коэффициенты фильтра выбрать так, чтобы его действительная ЧХ была равна

$$D(\alpha) = \frac{T_{m-1}\{K \cos \alpha\}}{T_{m-1}(K)}, \quad K > 1. \quad (6)$$

$$D(\alpha) = 2(b_4 \cos 4\alpha + b_2 \cos 2\alpha) + b_0,$$

$$D(\alpha)T_4(K) = T_4(K \cos \alpha) = K^4 \cos 4\alpha + 4K^3(K^2 - 1) \cos 2\alpha + (3K^2 - 1)(K^2 - 1),$$

$$b_4 = \frac{K^4}{2T_4(K)}, \quad b_2 = \frac{4K^2(K^2 - 1)}{2T_4(K)}, \quad b_0 = \frac{(3K^2 - 1)(K^2 - 1)}{T_4(K)}.$$

На рис. 1 приведена действительная ХЧ чебышевского фильтра для частоты среза $\omega_{cp} \Delta \tau = 2 \arccos \frac{1}{K} = 0,86$ и нормированной частотной характеристикой $D(\alpha) = \frac{T_8(1,1 \cos \alpha)}{T_8(1,1)}$.

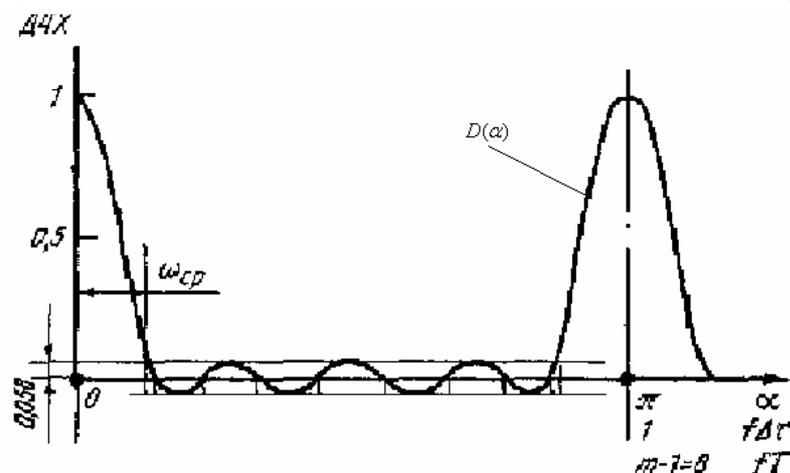


Рисунок 1. Чебышевский фильтр ($m = 9, K = 1.1$)

Характерные особенности суточного хода обнаружены на станции Москва по данным вертикального зондирования. На рис. 2 представлены значения критической частоты (красные точки) и отфильтрованные данные фильтром низкой частоты (гладкая кривая). При частоте среза $1/nf$, где $nf=12$. Для выделения низкочастотных составляющих исследуемого процесса используется низкочастотная фильтрация. Более простыми способами получения низкочастотных составляющих являются методы выделения разнообразных трендов низкочастотных составляющих процесса.

На рис. 3 представлены результаты низкочастотной фильтрации значений foF2, полученных методами вертикального зондирования среднеширотной ионосферы. Исходный ряд, подвергнутый фильтрации, представлял результаты зондирования с пятнадцатиминутным интервалом измерений в течение 2012 года. Низкочастотный фильтр настраивался таким образом, чтобы исключить суточный ход, затем результаты фильтрации были сжаты в 50 раз. Таким образом, на рис. 3 представлен годовой тренд критической частоты слоя F2.



Рисунок 2. Фильтрация с помощью фильтра F-НЧ, частота среза f_2 .

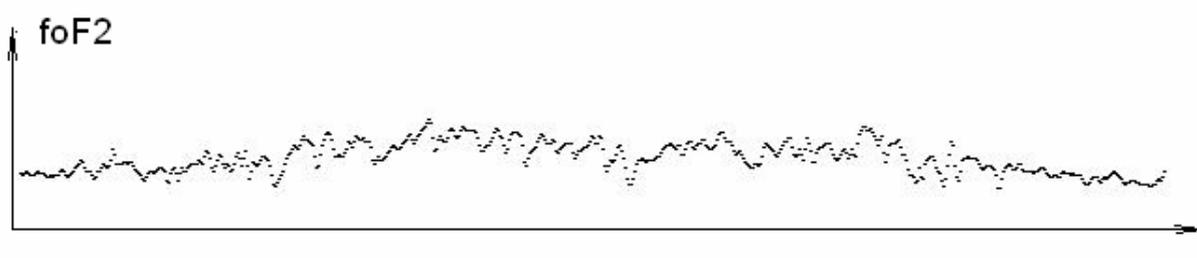


Рисунок 3. Низкочастотная составляющая изменений частоты foF2 на период 2012г.

Заключение

В статье рассмотрены свойства основных цифровых фильтров, используемых в геофизических службах. Одним из наиболее широко распространенных фильтров является цифровой фильтр равномерного осреднения, особенностью которого является простота применения. Однако фильтр арифметического осреднения может внести искажения, усложняющие решение задачи прогнозирования. Поэтому были сформулированы правила построения фильтров, обладающими частотными характеристиками близкими к идеальному гипотетическому цифровому фильтру, который может быть принят в качестве эталонного. Фильтр получил название исправленного непрерывного осреднения (ИНО), частотная характеристика которого эквивалентна последовательному соединению фильтров непрерывного скользящего осреднения и идеального фильтра нижних частот.

Рассмотрены способы построения цифровых фильтров в наибольшей степени отвечающие параметрам ИНО. К таким фильтрам относятся чебышевские и близкие к ним цифровые фильтры. Кроме того, чебышевские фильтры требуют существенно меньшего времени фильтрации при равном подавлении в полосе среза.

Литература

- Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М., «Наука», 1964.
 Рождественский Д.Б., Телегин В.А. Метод прогнозирования дискретных ионосферных наблюдений "Physics of auroral phenomena". *Proc. XXXVIII Annual Seminar, Apatity*, 2015
 Хэррис Ф. Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье. ТИИЭР, т. 66, № 1, январь 1978, с. 60-90.