"Physics of Auroral Phenomena", Proc. XXXVIII Annual Seminar, Apatity, pp. 134-141, 2015

Polar Geophysical Institute

ДВА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ОДНОРОДНОМ ИЗОТРОПНОМ ПРОВОДНИКЕ ДЛЯ ТОЧЕЧНОГО ДИПОЛЬНОГО ИСТОЧНИКА

О.В. Мингалев, И.В. Мингалев, В.С. Мингалев, О.И. Ахметов, М.Н. Мельник

Полярный геофизический институт КНЦ РАН, Апатиты, Россия

Аннотация. В работе выведена формула, описывающая решение задачи Коши для телеграфного уравнения в 3-мерном пространстве, аналогичная (и переходящая в нее при нулевой проводимости) формуле Кирхгофа для волнового уравнения. На основе выведенной формулы строится решение задачи о поле электрического диполя Герца с произвольной зависимостью тока от времени в бесконечном однородном изотропном проводнике. Также для случая гармонически зависящих от времени полей получено в наиболее общем случае точное решение задачи о поле горизонтального электрического диполя Герца на плоской границе раздела двух однородных изотропных сред, из которых одна обязательно является проводником.

Введение

Точные решения уравнений Максвелла для полей от искусственных источников в однородном изотропном проводнике имеют большое прикладное значение, в том числе для разработки и тестирования методов численного решения уравнений Максвелла. Особенно важны решения с распространяющимся в пространстве фронтом. Решение таких задач сводится к задаче Коши для 3-мерного телеграфного уравнения для векторного потенциала с нулевыми начальными условиями. Для телеграфного оператора известно фундаментальное решение (функция Грина) (например, без доказательства приведено в [1]), но до настоящего времени не была выведена формула, которая описывает решение задачи Коши, аналогично формуле Кирхгофа для волнового уравнения. В этой работе мы выводим эту формулу, и с её помощью получаем решение задачи о поле электрического диполя Герца, который включается на конечное время и имеет произвольную зависимость от времени тока в диполе.

Также для тестирования численных моделей распространения сигнала в волноводе Земля-ионосфера важны точные решения (во всем пространстве) для случая поля от источника, расположенного на плоской границе между двумя различными однородными бесконечными средами. Наилучшим примером является задача о поле гармонического по времени горизонтального электрического диполя Герца, который расположен на плоской границе раздела двух однородных изотропных сред, из которых одна обязательно является проводником, а вторая может быть как проводником, так и диэлектриком ([1-5]). До настоящего времени у этой задачи было известно только приближенное решение в низкочастотном пределе (без учета тока смещения) для случая сред с одинаковой магнитной проницаемостью. В этой работе мы приводим точное решение этой задачи для общего случая с различной магнитной проницаемостью.

1. Постановка задачи нахождения электромагнитного поля от заданного нестационарного сингулярного источника внешнего тока и вывод уравнения баланса заряда

Пусть однородный изотропный проводник с проводимостью σ, относительными проницаемостями диэлектрической ε и магнитной μ занимает область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, в которой задан сингулярный источник тока $\boldsymbol{j}^{(s)}(\boldsymbol{x},t)$ — сингулярная обобщенная функция, у которой носитель по $\boldsymbol{x}$ $\operatorname{supp}\boldsymbol{j}^{(s)} \subset \Omega$ является либо конечным множеством точек, либо ограниченной кривой, либо ограниченной поверхностью. Обозначим через $\mathcal{D}'\left(\Omega\times[t^0;T]\right)$ пространство обычных обобщенных функций в случае ограниченной области Ω и пространство обобщенных функций медленного роста по $\boldsymbol{x}$ в случае неограниченной области Ω (см. [6]). Обозначим через $\rho^{(s)}(\boldsymbol{x},t)$ плотность заряда в источнике, которая является сингулярной обобщенной функцией с тем же носителем $\operatorname{supp}\boldsymbol{j}^{(s)} \subset \Omega$ по $\boldsymbol{x}$. Подчеркнем, что эта функция заранее не известна и должна быть выражена через заданную плотность тока $\boldsymbol{j}^{(s)}(\boldsymbol{x},t)$ — входной параметр задачи. Через $\rho_\sigma(\boldsymbol{x},t)$ и $\boldsymbol{j}_\sigma(\boldsymbol{x},t)$ обозначим, соответственно, пространственные плотности заряда и тока вне источника, которые должны быть непрерывны по $\boldsymbol{x}$ в области $\Omega \setminus \operatorname{supp}\boldsymbol{j}^{(s)}$.

Уравнения Максвелла в системе СИ (ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные) будем рассматривать как в смысле обобщенных функций из пространства $\mathcal{D}'\left(\Omega\times[t^0;T]\right)$, так и в классическом смысле вне источника, то есть электромагнитное поле вне источника будем считать достаточно гладким, из класса функций $C^1\left(\left(\Omega\setminus\operatorname{supp}\boldsymbol{j}^{(s)}\right)\times[t^0;T]\right)$. Закон Ома в однородном изотропном проводнике имеет вид

$$\boldsymbol{j}_\sigma(\boldsymbol{x},t)=\sigma\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t), \tag{1.1}$$

материальные уравнения имеют вид

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)=\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t),\quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\mu\mu_0\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t), \tag{1.2}$$

а уравнение Гаусса и уравнение Фарадея имеют, соответственно, вид

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\operatorname{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t). \tag{1.4}$$

Уравнение Пуассона имеет вид:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)=\rho_\sigma(\boldsymbol{x},t)+\rho^{(s)}(\boldsymbol{x},t), \tag{1.5}$$

Уравнение Максвелла можно записать в форме:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t)-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{j}_\sigma(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{j}^{(s)}(\boldsymbol{x},t). \tag{1.6}$$

Получим уравнение баланса заряда, которое позволяет выразить плотность заряда в источнике $\rho^{(s)}(\boldsymbol{x},t)$ и в пространстве $\rho_\sigma(\boldsymbol{x},t)$ через входные параметры задачи — начальные условия и плотность тока в источнике. Обозначим через $\omega_\sigma=\sigma/(\varepsilon\varepsilon_0)$ частоту проводимости в системе СИ. Взятие div от уравнения (1.1) с учетом 1-го уравнения в (1.2) и уравнения (1.5) дает цепочку равенств

$$\operatorname{div}\boldsymbol{j}_\sigma(\boldsymbol{x},t)=\sigma\operatorname{div}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\omega_\sigma\left(\rho_\sigma(\boldsymbol{x},t)+\rho^{(s)}(\boldsymbol{x},t)\right). \tag{1.7}$$

Взятие div от уравнения (1.6) с учетом уравнений (1.3) и (1.7) дает уравнение баланса заряда

$$\frac{\partial\rho^{(s)}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\frac{\partial\rho_\sigma(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\omega_\sigma\rho^{(s)}(\boldsymbol{x},t)+\omega_\sigma\rho_\sigma(\boldsymbol{x},t)+\operatorname{div}\boldsymbol{j}^{(s)}(\boldsymbol{x},t)=0. \tag{1.8}$$

Поскольку пространственная плотность заряда вне источника ρ_σ непрерывна по $\boldsymbol{x}$ в области $\Omega\setminus\operatorname{supp}\boldsymbol{j}^{(s)}$, а $\rho^{(s)}$ и $\boldsymbol{j}^{(s)}$ являются сингулярными обобщенными функциями с носителем $\operatorname{supp}\boldsymbol{j}^{(s)}$ по $\boldsymbol{x}$, последнее уравнение равносильно следующим отдельным уравнениям баланса заряда в пространстве и в источнике:

$$\frac{\partial\rho_\sigma(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\omega_\sigma\rho_\sigma(\boldsymbol{x},t)=0, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial\rho^{(s)}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\omega_\sigma\rho^{(s)}(\boldsymbol{x},t)+\operatorname{div}\boldsymbol{j}^{(s)}(\boldsymbol{x},t)=0. \tag{1.10}$$

Эти уравнения относительно плотности заряда являются по переменной t обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями 1-го порядка с постоянным коэффициентом. Решение этих уравнений описывается формулой Коши, применение которой дает следующие формулы

$$\rho_\sigma(\boldsymbol{x},t)=e^{-\omega_\sigma\left(t-t^0\right)}\rho_\sigma\left(\boldsymbol{x},t^0\right),\qquad \rho^{(s)}(\boldsymbol{x},t)=e^{-\omega_\sigma\left(t-t^0\right)}\rho^{(s)}\left(\boldsymbol{x},t^0\right)-e^{-\omega_\sigma t}\int\limits_{t^0}^{t}e^{\omega_\sigma\theta}\operatorname{div}\boldsymbol{j}^{(s)}(\boldsymbol{x},\theta)\,d\theta. \tag{1.11}$$

Первая формула хорошо известна и описывает экспоненциальное по времени затухание пространственной плотности заряда в проводнике. Вторая формула показывает, что проводимость среды существенно влияет на баланс заряда в источнике.

Отметим, что искать как аналитические, так и численные решения напрямую для системы уравнений (1.1)-(1.6), (1.11) невозможно, поскольку она состоит из взаимно зацепляющихся уравнений. Поэтому для получения решений необходимо использовать потенциалы, и свести систему (1.1)—(1.6), (1.11) к отдельному уравнению для векторного потенциала.

2. Оптимальная калибровки и телеграфные уравнения для потенциалов в случае проводника

Обозначим через $c_0 = 1\big/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ и $c = c_0\big/\sqrt{\varepsilon\mu}$ соответственно скорость света в вакууме и в среде. Рассмотрим уравнения для потенциалов, которые в системе СИ вводятся соотношениями

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t), \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{x},t) - \frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}. \tag{2.1}$$

Для дальнейшего изложения введем линейные волновой $\widehat{L}_W$ и телеграфный $\widehat{L}_T$ операторы, которые действует по формулам

$$\widehat{L}_W u(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u, \quad \widehat{L}_T u(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega_\sigma\frac{\partial u}{\partial t} - c^2\Delta u, \quad \omega_\sigma = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \tag{2.2}$$

где $\Delta = \mathrm{div}\nabla$ — оператор Лапласа. Подстановка уравнений (2.1) в уравнение Пуассона (1.5) с учетом уравнений (1.2) дает уравнение для потенциалов, которое можно представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\widehat{L}_T\varphi(\boldsymbol{x},t) = \frac{c^2}{\varepsilon\varepsilon_0}\Big(\rho_\sigma(\boldsymbol{x},t) + \rho^{(s)}(\boldsymbol{x},t)\Big) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \omega_\sigma\varphi(\boldsymbol{x},t) + c^2\mathrm{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\right) \quad \text{в } \mathcal{D}'\Big(\Omega\times[t^0;T]\Big);\\
&\widehat{L}_T\varphi(\boldsymbol{x},t) = \frac{c^2\rho_\sigma(\boldsymbol{x},t)}{\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \omega_\sigma\varphi(\boldsymbol{x},t) + c^2\mathrm{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\right) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x}\in\Omega\setminus\mathrm{supp}\boldsymbol{j}^{(s)},\ \ t\in[t^0;T],
\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Аналогично подстановка уравнений (2.1) в уравнение Максвелла (1.6) с учетом уравнений (1.1) и (1.2) дает уравнение для потенциалов, которое можно представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\widehat{L}_T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\boldsymbol{j}^{(s)}(\boldsymbol{x},t) - \nabla\left(\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \omega_\sigma\varphi(\boldsymbol{x},t) + c^2\mathrm{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\right) \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'\Big(\Omega\times[t^0;T]\Big);\\
&\widehat{L}_T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = -\nabla\left(\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \omega_\sigma\varphi(\boldsymbol{x},t) + c^2\mathrm{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\right) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x}\in\Omega\setminus\mathrm{supp}\boldsymbol{j}^{(s)},\ \ t\in[t^0;T].
\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Из уравнений (2.3), (2.4) следует, что уравнение калибровки

$$\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \omega_\sigma\varphi(\boldsymbol{x},t) + c^2\mathrm{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{2.5}$$

равносильно тому, что каждый из потенциалов удовлетворяет своему отдельному телеграфному уравнению, не содержащему другой потенциал, которые имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&\widehat{L}_T\varphi(\boldsymbol{x},t) = \frac{c^2}{\varepsilon\varepsilon_0}\Big(\rho_\sigma(\boldsymbol{x},t) + \rho^{(s)}(\boldsymbol{x},t)\Big) \quad \text{в } \mathcal{D}'\Big(\Omega\times[t^0;T]\Big);\\
&\widehat{L}_T\varphi(\boldsymbol{x},t) = \frac{c^2\rho_\sigma(\boldsymbol{x},t)}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x}\in\Omega\setminus\mathrm{supp}\boldsymbol{j}^{(s)},\ \ t\in[t^0;T],
\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

$$\widehat{L}_T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\boldsymbol{j}^{(s)}(\boldsymbol{x},t) \quad \text{в } \mathcal{D}'\Big(\Omega\times[t^0;T]\Big) \quad \text{и} \quad \widehat{L}_T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = 0 \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x}\in\Omega\setminus\mathrm{supp}\boldsymbol{j}^{(s)},\ \ t\in[t^0;T]. \tag{2.7}$$

Аналогично уравнению (1.10), уравнение калибровки (2.5) относительно $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ по переменной t является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка с постоянным коэффициентом, то есть его решение описывается формулой Коши, применение которой дает формулу

$$\varphi(\boldsymbol{x},t) = e^{-\omega_\sigma\left(t-t^0\right)}\varphi\left(\boldsymbol{x},t^0\right) - c^2e^{-\omega_\sigma t}\int\limits_{t^0}^{t} e^{\omega_\sigma\theta}\mathrm{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\theta)\,d\theta. \tag{2.8}$$

Можно показать, что из уравнения для векторного потенциала (2.7), уравнения калибровки (2.5), уравнений баланса заряда (1.9), (1.10), а также уравнений (1.1), (1.2) и (2.1) вытекают уравнения Максвелла (1.3)-(1.6).

Отметим, что уравнение калибровки (2.5) приведено в [3] и является обобщением на случай однородного изотропного проводника калибровки Лоренца

$$\frac{\partial\varphi_L(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + c^2\mathrm{div}\boldsymbol{A}_L(\boldsymbol{x},t) = 0, \tag{2.9}$$

в которую оно переходит в случае нулевой проводимости $\sigma = 0$. В калибровке (2.5) для нахождения полей нужно найти решение только одного телеграфного уравнения (2.7) для векторного потенциала с заданным током источника в правой части, а затем найти скалярный потенциал по формуле (2.8). Таким образом, новая калибровка дает алгоритм нахождения полей, аналогичный тому, который дает калибровка Лоренца в случае диэлектрика, то есть без нахождения плотности заряда в источнике.

3. Формулы, описывающие решение задачи Коши для телеграфного уравнения в 3-мерном случае

Рассмотрим задачу Коши для пространственно 3-мерного линейного телеграфного уравнения, постановка которой полностью аналогична таковой для волнового уравнения:

$$\widehat{L}_T u(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\omega_\sigma\frac{\partial u}{\partial t}-c^2\Delta u=f(\boldsymbol{x},t),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3,\quad t>0, \tag{3.1}$$

$$u(\boldsymbol{x},t)\Big|_{t=0}=u^0(\boldsymbol{x}),\qquad \left.\frac{\partial u(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right|_{t=0}=u_t^0(\boldsymbol{x}),\qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3. \tag{3.2}$$

Здесь $\omega_\sigma>0$ и $c>0$ — заданные постоянные, $f(\boldsymbol{x},t)$, $u^0(\boldsymbol{x})$ и $u_t^0(\boldsymbol{x})$ — заданные функции. Полностью аналогично тому, как это сделано для линейного волнового уравнения в [6], можно показать, что решение задачи (3.1)-(3.2) представимо в виде суммы объемного телеграфного потенциала $V_T^{(0)}[f](\boldsymbol{x},t)$ с плотностью $f(\boldsymbol{x},t)$, поверхностного телеграфного потенциала простого слоя $V_T^{(1)}\left[u_t^0\right](\boldsymbol{x},t)$ с плотностью $u_t^0(\boldsymbol{x})$ и поверхностного телеграфного потенциала двойного слоя $V_T^{(2)}\left[u^0\right](\boldsymbol{x},t)$ с плотностью $u^0(\boldsymbol{x})$:

$$u(\boldsymbol{x},t)=V_T^{(0)}[f](\boldsymbol{x},t)+V_T^{(1)}\left[u_t^0\right](\boldsymbol{x},t)+V_T^{(2)}\left[u^0\right](\boldsymbol{x},t). \tag{3.3}$$

При этом потенциалы определяются как свертки

$$\left.\begin{aligned}&V_T^{(0)}[f](\boldsymbol{x},t)=\mathcal{E}_T(\boldsymbol{x},t)*f(\boldsymbol{x},t)=\int\limits_{\mathbb{R}^4}\mathcal{E}_T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-\tau)f(\boldsymbol{y},\tau)\,d^3\boldsymbol{y}\,d\tau,\\&V_T^{(1)}\left[u^0\right](\boldsymbol{x},t)=\mathcal{E}_T(\boldsymbol{x},t)*u^0(\boldsymbol{x})=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathcal{E}_T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)\,u^0(\boldsymbol{y})\,d^3\boldsymbol{y},\qquad V_T^{(2)}\left[u^0\right](\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial}{\partial t}V_T^{(1)}\left[u^0\right](\boldsymbol{x},t)\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

с фундаментальным решением $\mathcal{E}_T(\boldsymbol{x},t)$ 3-мерного телеграфного оператора $\widehat{L}_T$, которое определяется как решение уравнения $\widehat{L}_T\mathcal{E}_T(\boldsymbol{x},t)=\delta(\boldsymbol{x},t)$. Отметим, что непосредственно найти $\mathcal{E}_T(\boldsymbol{x},t)$, используя преобразование Фурье, не получается. Для получения $\mathcal{E}_T(\boldsymbol{x},t)$ задачу Коши (3.1)-(3.2) необходимо преобразовать заменой коэффициента и неизвестной функции

$$\omega_\sigma=-2i\omega,\quad u(\boldsymbol{x},t)=e^{-\frac{1}{2}\omega_\sigma t}w(\boldsymbol{x},t)=e^{i\omega t}w(\boldsymbol{x},t) \tag{3.5}$$

к следующей задаче Коши для уравнения Клейна-Гордона-Фока [6]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-c^2\Delta w+\omega^2 w=F(\boldsymbol{x},t),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3,\quad t>0,\quad \text{где}\quad F(\boldsymbol{x},t)=e^{\frac{1}{2}\omega_\sigma t}f(\boldsymbol{x},t)=e^{-i\omega t}f(\boldsymbol{x},t),$$

$$w(\boldsymbol{x},t)\Big|_{t=0}=u^0(\boldsymbol{x}),\qquad \left.\frac{\partial w(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right|_{t=0}=w_t^0(\boldsymbol{x})=u_t^0(\boldsymbol{x})+\frac{\omega_\sigma}{2}u^0(\boldsymbol{x})=u_t^0(\boldsymbol{x})-i\omega u^0(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3.$$

Фундаментальное решение 3-мерного оператора Клейна-Гордона-Фока, которое обозначим как $\mathcal{E}_{KGF}(\boldsymbol{x},t)$, находится с помощью преобразования Фурье и имеет следующий вид (см., например, [6]):

$$\mathcal{E}_{KGF}(\boldsymbol{x},t)=\mathcal{E}_W(\boldsymbol{x},t)+\mathcal{E}_{KGF}^{(1)}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\theta(t)}{4\pi c^2 t}\delta_{S_{ct}}(\boldsymbol{x})-\frac{\omega\,\theta(t)\theta(ct-|\boldsymbol{x}|)}{4\pi c^2\sqrt{(ct)^2-|\boldsymbol{x}|^2}}J_1\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{(ct)^2-|\boldsymbol{x}|^2}\right), \tag{3.6}$$

где $\mathcal{E}_W(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{\theta(t)}{4\pi c^2 t}\delta_{S_{ct}}(\boldsymbol{x})$ — фундаментальное решение 3-мерного волнового оператора, $\theta(t)$ — тета-функция Хевисайда, $\delta_{S_{ct}}(\boldsymbol{x})$ — простой слой на сфере $S_{ct}=\{\boldsymbol{x}:|\boldsymbol{x}|=ct\}$ с плотностью 1, $J_1(s)$ — функции Бесселя, а $\mathcal{E}_{KGF}^{(1)}(\boldsymbol{x},t)=-\dfrac{\omega\,\theta(t)\theta(ct-|\boldsymbol{x}|)}{4\pi c^2\sqrt{(ct)^2-|\boldsymbol{x}|^2}}J_1\left(\dfrac{\omega}{c}\sqrt{(ct)^2-|\boldsymbol{x}|^2}\right)$ — дополнительное к волновой части слагаемое. Применяя к (3.6) обратное преобразование (3.5) и учитывая равенство $I_1(s)=-iJ_1(is)$ для модифицированной функции Бесселя (функции Инфельда), получим для $\mathcal{E}_T(\boldsymbol{x},t)$ следующее выражение:

$$\mathcal{E}_T(\boldsymbol{x},t)=\mathcal{E}_W(\boldsymbol{x},t)e^{-\frac{1}{2}\omega_\sigma t}+\mathcal{E}_T^{(1)}(\boldsymbol{x},t)=e^{-\frac{1}{2}\omega_\sigma t}\left(\frac{\theta(t)}{4\pi c^2 t}\delta_{S_{ct}}(\boldsymbol{x})+\frac{\omega_\sigma\theta(t)\theta(ct-|\boldsymbol{x}|)}{8\pi c^2\sqrt{(ct)^2-|\boldsymbol{x}|^2}}I_1\left(\frac{\omega_\sigma}{2c}\sqrt{(ct)^2-|\boldsymbol{x}|^2}\right)\right),\quad(3.7)$$

которое приведено в [1] и содержит дополнительное к волновой части «шлейфовое» слагаемое

$$\mathcal{E}_T^{(1)}(\boldsymbol{x},t)=e^{-\frac{1}{2}\omega_\sigma t}\frac{\omega_\sigma\theta(t)\theta(ct-|\boldsymbol{x}|)}{8\pi c^2\sqrt{(ct)^2-|\boldsymbol{x}|^2}}I_1\left(\frac{\omega_\sigma}{2c}\sqrt{(ct)^2-|\boldsymbol{x}|^2}\right).$$

Подставляя формулы (3.7) в (3.4), можно получить следующие выражения для телеграфных потенциалов:

$$V_T^{(0)}[f](\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_{|\boldsymbol{y}|\le ct}\frac{f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-|\boldsymbol{y}|/c)}{|\boldsymbol{y}|}e^{-\frac{\omega_\sigma|\boldsymbol{y}|}{2c}}d^3\boldsymbol{y}+$$

$$+\frac{\omega_\sigma}{8\pi c^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{\omega_\sigma\tau}{2}}\left(\int\limits_{|\boldsymbol{y}|\le c\tau}I_1\left(\frac{\omega_\sigma}{2c}\sqrt{(c\tau)^2-|\boldsymbol{y}|^2}\right)\frac{f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-\tau)}{\sqrt{(c\tau)^2-|\boldsymbol{y}|^2}}d^3\boldsymbol{y}\right)d\tau,\quad(3.8)$$

$$V_T^{(1)}\left[u_t^0\right](\boldsymbol{x},t)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\omega_\sigma t}}{4\pi c^2}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{|\boldsymbol{y}|=ct}u_t^0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}+\frac{\omega_\sigma}{2}\int\limits_{|\boldsymbol{y}|\le ct}I_1\left(\frac{\omega_\sigma}{2c}\sqrt{(ct)^2-|\boldsymbol{y}|^2}\right)\frac{u_t^0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\sqrt{(ct)^2-|\boldsymbol{y}|^2}}d^3\boldsymbol{y}\right),\quad(3.9)$$

$$V_T^{(2)}\left[u^0\right](\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\omega_\sigma t}}{4\pi c^2}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{|\boldsymbol{y}|=ct}u^0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})dS_{\boldsymbol{y}}+\frac{\omega_\sigma}{2}\int\limits_{|\boldsymbol{y}|\le ct}I_1\left(\frac{\omega_\sigma}{2c}\sqrt{(ct)^2-|\boldsymbol{y}|^2}\right)\frac{u^0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\sqrt{(ct)^2-|\boldsymbol{y}|^2}}d^3\boldsymbol{y}\right)\right).\quad(3.10)$$

Таким образом, формулы (3.3), (3.8)-(3.10) описывают решение задачи Коши (3.1), (3.2) для телеграфного уравнения в 3-мерном случае аналогично формуле Кирхгофа для линейного волнового уравнения.

4. Поле электрического диполя Герца в бесконечной однородной изотропной среде

Рассмотрим случай, когда электрический диполь Герца с произвольной зависимостью тока от времени расположен в начале координат в бесконечной однородной изотропной среде и включается в момент времени $t=0$. Тогда ток в источнике удобно обозначить как

$$\boldsymbol{j}^{(s)}(\boldsymbol{x},t)=\delta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}'(t),\quad \boldsymbol{P}(t)\equiv 0\quad\text{при}\quad t\le 0,\quad(4.1)$$

где через $\boldsymbol{P}(t)$ и $\boldsymbol{P}'(t)=\dfrac{d\boldsymbol{P}(t)}{dt}$ обозначены момент диполя как функция времени и ее производная. Например, в случае диэлектрика $\boldsymbol{P}(t)=lQ(t)\boldsymbol{v}(t)$, где $\boldsymbol{v}(t)$— единичный вектор направления, $Q(t)$— заряд диполя, а в случае стационарного диполя в проводнике $\boldsymbol{P}'(t)\equiv\boldsymbol{P}_0'=I_0 l\boldsymbol{v}=Const$. Тогда векторный потенциал $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ согласно уравнению (2.7) является решением задачи Коши (3.1), (3.2) с правой частью $f(\boldsymbol{x},t)=\delta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}'(t)/(\varepsilon\varepsilon_0)$ и нулевыми начальными условиями. Из формул (3.3), (3.8)-(3.10) следует, что

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}V_T^{(0)}\left[\delta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}'(t)\right](\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x},t),\quad(4.2)$$

где волновое слагаемое $\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x},t)$ определяется формулой

$$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mu_0\mu}{4\pi|\boldsymbol{x}|}\boldsymbol{P}'\left(t-\frac{1}{c}|\boldsymbol{x}|\right)e^{-\frac{\omega_\sigma|\boldsymbol{x}|}{2c}},\quad(4.3)$$

а второе слагаемое $\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x},t)$, названное в [1] «шлейфовым», определяется формулой

$$\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x},t)=\omega_\sigma\frac{\mu_0\mu}{8\pi}\theta(ct-|\boldsymbol{x}|)\int\limits_{|\boldsymbol{x}|/c}^t\frac{\boldsymbol{P}'(t-\tau)}{\sqrt{(c\tau)^2-|\boldsymbol{x}|^2}}I_1\left(\frac{\omega_\sigma}{2c}\sqrt{(c\tau)^2-|\boldsymbol{x}|^2}\right)e^{-\frac{\omega_\sigma\tau}{2}}d\tau.\quad(4.4)$$

Отметим, что в случае диэлектрика $\omega_\sigma=0$, и из формул (4.2)-(4.4) получаем решение:

$$\boldsymbol{A}_L(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mu_0\mu}{4\pi|\boldsymbol{x}|}\boldsymbol{P}'(t-|\boldsymbol{x}|/c),\quad(4.5)$$

которое с учетом калибровки Лоренца (2.9) дает следующее уравнение для скалярного потенциала

$$\frac{\partial\varphi_L(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=-c^2\mathrm{div}\boldsymbol{A}_L(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0|\boldsymbol{x}|^3}\left(\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{P}'(t-|\boldsymbol{x}|/c)\right)+\frac{|\boldsymbol{x}|}{c}\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{P}''(t-|\boldsymbol{x}|/c)\right)\right),$$

где через $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$ обозначено скалярное произведение векторов в пространстве $\mathbb{R}^3$. Интегрирование этого уравнения по времени с учетом нулевых начальных условий дает решение

$$\varphi_L(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0|\boldsymbol{x}|^3}\left(\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{P}(t-|\boldsymbol{x}|/c)\right)+\frac{|\boldsymbol{x}|}{c}\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{P}'(t-|\boldsymbol{x}|/c)\right)\right). \quad (4.6)$$

Подставляя полученное решение (4.5), (4.6) в формулы (2.1), нетрудно получить выражения для полей, которые выведены в [7] при помощи значительно более длинных выкладок.

5. Случай гармонических по времени полей

Рассмотрим важный случай, когда ток в источнике, а значит и поля, гармонически зависят от времени:

$$\boldsymbol{j}^{(s)}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{j}_m^{(s)}(\boldsymbol{x})\cdot e^{i\omega_0 t},\quad F^{(s)}(\boldsymbol{x},t)=F_m^{(s)}(\boldsymbol{x})\cdot e^{i\omega_0 t},\quad F=\varphi,\boldsymbol{A},\boldsymbol{E},\boldsymbol{D},\boldsymbol{H},\boldsymbol{B}, \quad (5.1)$$

где ω_0 — частота источника, и, следуя [8], через $F_m^{(s)}(\boldsymbol{x})$ обозначена комплексная амплитуда. В этом случае телеграфное уравнение переходит в уравнение Гельмгольца для комплексных амплитуд:

$$\widehat{L}_T u(\boldsymbol{x},t)=f(\boldsymbol{x},t)\mapsto \Delta u_m(\boldsymbol{x})+k^2u_m(\boldsymbol{x})=-\frac{f_m(\boldsymbol{x})}{c^2},\quad \text{где}\quad k^2=\frac{\omega_0(\omega_0-i\omega_\sigma)}{c^2}=\mu\mu_0\omega_0(\varepsilon\varepsilon_0\omega_0-i\sigma), \quad (5.2)$$

$$\text{то есть}\quad k=\sqrt{\frac{\mu\mu_0\omega_0\sigma}{2}}\left(\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0}{\omega_\sigma}\right)^2}-\left(\frac{\omega_0}{\omega_\sigma}\right)\right)^{-1/2}-i\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0}{\omega_\sigma}\right)^2}-\left(\frac{\omega_0}{\omega_\sigma}\right)\right)^{1/2}\right),\quad \omega_\sigma=\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (5.3)$$

Из калибровки (2.5) и подстановки (5.1) вытекает соотношение

$$\varphi_m(\boldsymbol{x})=\frac{-c^2}{i\omega_0+\omega_\sigma}\mathrm{div}\boldsymbol{A}_m(\boldsymbol{x})=\frac{i\omega_0}{k^2}\mathrm{div}\boldsymbol{A}_m(\boldsymbol{x}). \quad (5.4)$$

Подставляя это соотношение в (2.1), получаем выражение для амплитуд полей через амплитуду только одного векторного потенциала:

$$\boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{x})=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}_m(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{E}_m(\boldsymbol{x})=-\nabla\varphi_m(\boldsymbol{x})-i\omega_0\boldsymbol{A}_m(\boldsymbol{x})=-i\omega_0\left(\boldsymbol{A}_m(\boldsymbol{x})+\frac{1}{k^2}\nabla\mathrm{div}\boldsymbol{A}_m(\boldsymbol{x})\right). \quad (5.5)$$

Таким образом, для определения полей нужно решить уравнение Гельмгольца для комплексной амплитуды векторного потенциала:

$$\Delta\boldsymbol{A}_m(\boldsymbol{x})+k^2\boldsymbol{A}_m(\boldsymbol{x})=-\mu\mu_0\boldsymbol{j}_m^{(s)}(\boldsymbol{x}), \quad (5.6)$$

а затем найти амплитуды полей по формулам (5.5). Отметим, что формулы (5.4)-(5.6) по форме полностью совпадают с записанными через волновое число формулами для диэлектрика (см., например, [1-5] и [7,8]), когда волновое число является чисто вещественным:

$$k\mapsto k_0=\omega_0/c=\omega_0\sqrt{\varepsilon\mu}/c_0. \quad (5.7)$$

Отметим, что гармонические по времени поля в однородном изотропном проводнике для многих типов источников рассматривались в низкочастотном пределе (см. [1-5]), то есть без учета тока смещения, когда $\omega_0\ll\omega_\sigma=\sigma/(\varepsilon\varepsilon_0)$. В этом приближении в определяемом в (5.2) квадрате волнового числа k^2 отбрасывается вещественная часть, то есть k^2 считается чисто мнимым:

$$k^2=-i\omega_0\omega_\sigma/c^2=-i\mu\mu_0\omega_0\sigma. \quad (5.8)$$

Известен широкий набор задач (см. [1-5]), в каждой из которых получено приближенное «низкочастотное» решение для векторного потенциала, то есть получено решение уравнения (5.6) с соответствующими граничными условиями и условиями на бесконечности и с волновым числом, определяемым формулой (5.8). Калибровка (2.5) позволяет получить точное решение полных уравнений Максвелла для каждой задачи из этого набора в результате следующей формальной процедуры. Нужно выразить граничные условия и решение уравнения (5.6) в каждой из рассматриваемых в данной задаче сред через определяемые по формуле (5.8) волновые числа сред. Далее нужно в решении уравнения (5.6) для каждой среды и в граничных условиях волновые числа сред определять по формуле из (5.2), а амплитуды полей в каждой среде определять через амплитуду векторного потенциала по формулам (5.5). В качестве примера рассмотрим две задачи: поле точечного электрического диполя (диполь Герца) в бесконечном проводнике, а также поле такого же горизонтального диполя на плоской границе раздела двух однородных изотропных сред (см. [1-5] и [7,8]), одна из которых обязательно является проводником.

Поле точечного электрического диполя в бесконечном проводнике

Рассмотрим электрический диполь Герца в бесконечном проводнике с амплитудой тока I_m, расстоянием между заземлениями l, расположенный в начале координат и направленный вдоль единичного вектора $\boldsymbol{v}$. В этом случае

$$\boldsymbol{j}_m^{(s)}(\boldsymbol{x}) = I_m l \delta(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{v}. \tag{5.9}$$

Из (5.3) следует, что $\mathrm{Re}(ik) = -\mathrm{Im}(k) > 0$, поэтому стремящееся к нулю при $r = |\boldsymbol{x}| \to \infty$ решение уравнения (5.6) во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет вид (см., например, [6, 8]):

$$\boldsymbol{A}_m(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v} \cdot \mu\mu_0 I_m l\, e^{-ik|\boldsymbol{x}|} \big/ (4\pi|\boldsymbol{x}|). \tag{5.10}$$

Отсюда по формулам (5.5) получаем следующие выражения для амплитуд полей:

$$\boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu\mu_0 I_m l\, e^{-ikr}}{4\pi r^3}(1+ikr)\cdot[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{x}], \quad \boldsymbol{E}_m(\boldsymbol{x}) = i\omega_0 \frac{\mu\mu_0 I_m l\, e^{-ikr}}{4\pi r}\left(\left(\frac{1+ikr}{k^2r^2}-1\right)\boldsymbol{v} + \left(k^2r^2-3-3ikr\right)\frac{(\boldsymbol{x};\boldsymbol{v})\boldsymbol{x}}{r^2}\right).$$

Поле горизонтального электрического диполя на плоской границе раздела двух сред

Пусть среда $(\alpha = 1)$ с параметрами $\mu_1, \varepsilon_1, \sigma_1$ занимает верхнее полупространство $\{z > 0\}$, а среда $(\alpha = 2)$ с параметрами $\mu_2, \varepsilon_2, \sigma_2$ занимает нижнее полупространство $\{z < 0\}$. Будем считать, что описанный выше электрический диполь расположен в начале координат и направлен вдоль оси *OX*, то есть $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_x$ — вектор декартова базиса. Тогда в каждой из двух сред уравнение (5.6) примет вид

$$\Delta \boldsymbol{A}_m^{(\alpha)}(\boldsymbol{x}) + k_\alpha^2 \boldsymbol{A}_m^{(\alpha)}(\boldsymbol{x}) = -2\gamma_\alpha \mu_\alpha \mu_0 I_m l\, \delta(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_x, \quad \text{где} \quad k_\alpha^2 = \mu_\alpha \mu_0 \omega_0 \left(\varepsilon_\alpha \varepsilon_0 \omega_0 - i\sigma_\alpha\right), \quad \alpha = 1,2, \tag{5.11}$$

и где неизвестные заранее коэффициенты γ_1 и $\gamma_2 = 1 - \gamma_1$ определяются в ходе решения задачи из стандартных условий непрерывности нормальной компоненты магнитной индукции и касательной составляющей напряженности электрического поля при переходе через границу раздела сред — плоскость $\{z = 0\}$, которые имеют вид

$$B_{mz}^{(1)}(\boldsymbol{x})\Big|_{z=+0} = B_{mz}^{(2)}(\boldsymbol{x})\Big|_{z=-0}, \quad E_{mx}^{(1)}(\boldsymbol{x})\Big|_{z=+0} = E_{mx}^{(2)}(\boldsymbol{x})\Big|_{z=-0}, \quad E_{my}^{(1)}(\boldsymbol{x})\Big|_{z=+0} = E_{my}^{(2)}(\boldsymbol{x})\Big|_{z=-0}, \tag{5.12}$$

а также из условия отсутствия поверхностного тока на границе раздела, которое означает непрерывность касательной составляющей напряженности магнитного поля при переходе через эту границу и в рассматриваемом случае может быть представлено в виде:

$$\frac{1}{\mu_1} B_{mx}^{(1)}(\boldsymbol{x})\Bigg|_{z=+0} = \frac{1}{\mu_2} B_{mx}^{(2)}(\boldsymbol{x})\Bigg|_{z=-0}, \quad \frac{1}{\mu_1} B_{my}^{(1)}(\boldsymbol{x})\Bigg|_{z=+0} = \frac{1}{\mu_2} B_{my}^{(2)}(\boldsymbol{x})\Bigg|_{z=-0}. \tag{5.13}$$

Из соображений симметрии (см. [1-4]) вытекает, что векторный потенциал имеет только 2 компоненты:

$$\boldsymbol{A}_m^{(\alpha)}(\boldsymbol{x}) = A_{mx}^{(\alpha)}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_x + A_{mz}^{(\alpha)}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_z, \quad \text{то есть} \quad \boldsymbol{B}_m^{(\alpha)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial A_{mz}^{(\alpha)}}{\partial y} \boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial A_{mx}^{(\alpha)}}{\partial z} - \frac{\partial A_{mz}^{(\alpha)}}{\partial x}\right) \boldsymbol{e}_y - \frac{\partial A_{mx}^{(\alpha)}}{\partial y} \boldsymbol{e}_z. \tag{5.14}$$

В этом случае из 1-го условия в (5.12) вытекает равенство

$$A_{mx}^{(1)}(\boldsymbol{x})\Big|_{z=+0} = A_{mx}^{(2)}(\boldsymbol{x})\Big|_{z=-0}, \tag{5.15}$$

из 2-го и 3-го условий в (5.12) с учетом (5.15) вытекает равенство

$$\frac{1}{k_1^2}\left(\frac{\partial A_{mx}^{(1)}(\boldsymbol{x})}{\partial x} + \frac{\partial A_{mz}^{(1)}(\boldsymbol{x})}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=+0} = \frac{1}{k_2^2}\left(\frac{\partial A_{mx}^{(2)}(\boldsymbol{x})}{\partial x} + \frac{\partial A_{mz}^{(2)}(\boldsymbol{x})}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=-0}, \tag{5.16}$$

из 1-го условия в (5.13) вытекает равенство

$$\frac{1}{\mu_1} A_{mz}^{(1)}(\boldsymbol{x})\Bigg|_{z=+0} = \frac{1}{\mu_2} A_{mz}^{(2)}(\boldsymbol{x})\Bigg|_{z=-0}, \tag{5.17}$$

а из 2-го условия в (5.13) с учетом (5.15) вытекает равенство

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_{mx}^{(1)}(\boldsymbol{x})}{\partial z}\Bigg|_{z=+0} = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_{mx}^{(2)}(\boldsymbol{x})}{\partial z}\Bigg|_{z=-0}. \tag{5.18}$$

В [2] были получены граничные условия (5.15)-(5.18), предложен метод нахождения решений уравнений (5.11), которые удовлетворяют этим условиям, а также получено такое решение для случая $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

Этим же методом для общего случая нами получено решение, которое в системе СИ можно представить в виде

$$A_{mx}^{(\alpha)}(\boldsymbol{x}) = \mu_0\mu_1\mu_2 \frac{I_m l}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda e^{-|z|\sqrt{\lambda^2-k_\alpha^2}} J_0\left(\lambda\sqrt{x^2+y^2}\right) d\lambda}{\left(\mu_1\sqrt{\lambda^2-k_2^2}+\mu_2\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\right)}, \tag{5.19}$$

$$A_{mz}^{(\alpha)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0\mu_1\mu_2 I_m l x}{2\pi\mu_\alpha\sqrt{x^2+y^2}} \int_0^{+\infty} \frac{\left(k_1^2-k_2^2\right)\lambda^2 e^{-|z|\sqrt{\lambda^2-k_\alpha^2}} J_1\left(\lambda\sqrt{x^2+y^2}\right) d\lambda}{\left(\mu_1\sqrt{\lambda^2-k_2^2}+\mu_2\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\right)\left(k_1^2\mu_2\sqrt{\lambda^2-k_2^2}+k_2^2\mu_1\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\right)}, \tag{5.20}$$

где $J_0(s)$ и $J_1(s)$ — функции Бесселя. Из этих формул вытекает равенство

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}_m^{(\alpha)}(\boldsymbol{x}) = -k_\alpha^2 \frac{\mu_0\mu_1\mu_2 I_m l x}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}} \int_0^{+\infty} \frac{\left(\mu_1\sqrt{\lambda^2-k_1^2}+\mu_2\sqrt{\lambda^2-k_2^2}\right)\lambda^2 e^{-|z|\sqrt{\lambda^2-k_\alpha^2}} J_1\left(\lambda\sqrt{x^2+y^2}\right) d\lambda}{\left(\mu_1\sqrt{\lambda^2-k_2^2}+\mu_2\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\right)\left(k_1^2\mu_2\sqrt{\lambda^2-k_2^2}+k_2^2\mu_1\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\right)}. \tag{5.21}$$

Полученное точное решение позволяет по формулам (5.5) с учетом формулы (5.21) найти амплитуды полей в любой точке пространства. Нетрудно проверить, что в случае одинаковых сред оно совпадает с решением (5.10) для всего пространства. Отметим, что в пределе $\omega_0 \mapsto +0$ полученное решение переходит в решение стационарной задачи $\boldsymbol{A}_m^{(\alpha)}(\boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{A}^{(\alpha)}(\boldsymbol{x})$, для которой уравнения (5.11) примут вид уравнений Пуассона

$$\Delta\boldsymbol{A}^{(\alpha)}(\boldsymbol{x}) = -2\gamma_\alpha\mu_\alpha\mu_0 I_m l\,\delta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_x, \quad \alpha = 1,2:$$

$$A_{mx}^{(\alpha)}(\boldsymbol{x}) \mapsto A_x(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0\mu_1\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)} \frac{I_m l}{2\pi|\boldsymbol{x}|}, \quad A_{mz}^{(\alpha)}(\boldsymbol{x}) \mapsto A_z^{(\alpha)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0\mu_\alpha(\mu_2\sigma_2-\mu_1\sigma_1)}{(\mu_1+\mu_2)(\sigma_1+\sigma_2)} \frac{I_m l x}{2\pi\left(x^2+y^2\right)}\left(\frac{|z|}{|\boldsymbol{x}|}-1\right),$$

что дает $\operatorname{div}\boldsymbol{A}^{(\alpha)}(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{\mu_0\mu_\alpha\sigma_\alpha}{(\sigma_1+\sigma_2)} \dfrac{I_m l x}{2\pi|\boldsymbol{x}|^3}$ и $\varphi_m^{(\alpha)}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{i\omega_0}{k_\alpha^2}\operatorname{div}\boldsymbol{A}_m^{(\alpha)} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{\operatorname{div}\boldsymbol{A}^{(\alpha)}(\boldsymbol{x})}{\mu_0\mu_\alpha\sigma_\alpha} = \dfrac{I_m l x}{2\pi(\sigma_1+\sigma_2)|\boldsymbol{x}|^3}$,

поскольку $\lim\limits_{\omega_0\mapsto+0} \dfrac{i\omega_0}{k_\alpha^2} = \dfrac{-1}{\mu_0\mu_\alpha\sigma_\alpha}$. То есть в стационарном случае электрическое поле и компонента $A_x(\boldsymbol{x})$ векторного потенциала описываются одинаковыми формулами в обеих средах, и получаются следующие значения коэффициентов в уравнениях (5.11): $\gamma_1 = \mu_2/(\mu_1+\mu_2)$ и $\gamma_2 = \mu_1/(\mu_1+\mu_2)$.

Заключение

В работе впервые получена формула, описывающая решение задачи Коши для телеграфного уравнения в 3-мерном пространстве, аналогичная (и переходящая в нее при нулевой проводимости) формуле Кирхгофа для волнового уравнения. На основе полученной формулы найдено решение задачи о поле электрического диполя Герца с произвольной зависимостью тока от времени в бесконечном однородном изотропном проводнике. Также получено точное решение во всем пространстве для важной задачи о поле горизонтального гармонического по времени электрического диполя Герца, расположенного на границе раздела двух сред. Ранее для этой задачи были известны только приближенные выражения для полей в плоскости раздела. Эти результаты имеют большое значение для разработки и тестирования физически адекватных численных методов решения уравнений Максвелла в проводнике.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 13-01-00063.

Литература

1. Светов Б. С. Основы геоэлектрики. Москва: Изд-во ЛКИ, 2008.
2. Заборовский А. И. Электроразведка. Москва: ГНТИ Нефтяной и горно-топливной литературы, 1963.
3. Матвеев Б. К. Электроразведка. 2-е изд-е. Москва: Недра, 1990.
4. Крылов С. С. Геоэлектрика: Поля искусственных источников. С.-Петербург: Изд-во СПбГУ, 2004.
5. Wait J. R. Geo-Electromagnetism. New York: ACADEMIC PRESS, 1982.
6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. 5-е изд-е. Москва: Наука, 1988.
7. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Том III. Электричество. 4-е изд-е. Москва: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2004.
8. Никольский Н. Н., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн. Москва: Наука, 1989.