“Physics of Auroral Phenomena”, Proc. XXXVI Annual Seminar, Apatity, pp. 178 - 181, 2013

Polar
Geophysical
Institute

ВЛИЯНИЕ ГРАВИТАЦИИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН В НИЖНЕЙ ИОНОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

В.Д. Терещенко, Ю.А. Шаповалова, В.А. Терещенко

Полярный геофизический институт КНЦ РАН, Мурманск, Россия, 183010
E-mail: vladter@pgi.ru

Аннотация. На основе решения линеаризованных уравнений магнитной гидродинамики рассмотрено совместное влияние магнитного поля и гравитации на генерацию и распространение магнитогидродинамических (МГД) волн в ионизированной изотермической атмосфере.

1. Введение

В настоящей работе рассматривается генерация и распространение магнито-акустико-гравитационных волн (МАГВ) в сжимаемой проводящей изотермической атмосфере, находящейся в магнитном и гравитационном полях. Такая задача решалась неоднократно [см., например, *Госсард и Хук*, 1978; *Хантадзе и др.*, 2007; *Zhugzhda and Dzhalilov*, 1984], однако простых аналитических выражений для спектра собственных колебаний среды не было получено.

Из-за сложности дисперсионного уравнения для анализа атмосферных волн рассматривались два предельных случая [*Хантадзе и др.*, 2007]: 1) отсутствие магнитного поля и 2) отсутствие гравитации. При таком подходе к изучению волновых процессов в атмосфере теряется взаимосвязь между акустико-гравитационными и магнитозвуковыми волнами. Ниже получено простое дисперсионное соотношение для низкочастотных волновых возмущений в атмосфере Земли и исследовано влияние магнитного поля и гравитации на эти волновые процессы.

2. Основные уравнения

Для решения поставленной задачи используем систему линеаризованных уравнений непрерывности массы, движения, энергии и индукции для слабоионизованной плазмы, находящейся в постоянных магнитном и гравитационном полях [*Госсард и Хук*, 1978]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla(\rho_0\mathbf{v})=0\,, \qquad \rho_0\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\nabla p-\rho\,\mathbf{g}+2\rho_0\sin\varphi\left[\text{ŕ¶}\times\mathbf{v}\right]-\frac{1}{4\pi}\left[\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)\times\mathbf{B}_0\right]=0\,,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla p_0=c_s^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla\rho_0\right), \qquad \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\left[\nabla\times\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0\right)\right]-\frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{B}=0\,, \tag{1}$$

где $\rho, p, \mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ – соответственно возмущения плотности, давления, скорости и магнитного поля от некоторых средних (фоновых) значений; индексом ноль обозначены средние значения соответствующих величин; $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести; ŕ¶ – угловая скорость вращения Земли; φ – географическая широта; $c_s=\sqrt{\gamma g H}$ – адиабатическая скорость звука; γ – отношение удельных теплоёмкостей; $H=RT/g$ – приведенная высота однородной атмосферы; R – универсальная газовая постоянная; T – температура по Кельвину; c –скорость света в вакууме; σ – статистическая электропроводность или проводимость плазмы; ∇ и Δ – дифференциальные операторы Гамильтона и Лапласса. Члены системы уравнений (1), связанные с ŕ¶ и $\Delta\mathbf{B}$, соответственно отражают в волновых возмущениях действия силы Кориолиса (влияние вращения Земли) и эффекта Холла (ток в ионосфере течёт не только вдоль электрического поля, но и поперёк него).

Возьмём прямоугольную систему координат, в которой оси x и y направлены горизонтально, а ось z направлена вертикально вверх, противоположно $\mathbf{g}$. Пусть вектор магнитной поля $\mathbf{B_0}$ лежит в плоскости $(x,\ z)$, т.е. $\mathbf{B}_0=\left[B_{0x},0,B_{0z}\right]$. В дальнейшем полагаем, что $T=\mathrm{const}$. Плотность ρ_0 и давление p_0 связаны уравнением гидростатического приближения $\partial p_0/\partial z=-\rho_0 g=-p_0/H$.

Пренебрегая, для простоты, действием силы Кориолиса и эффектом Холла (приближение идеальной проводимости) и рассматривая колебания атмосферы в виде простых плоских волн $\exp\left[i\left(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t\right)\right]$ (ω – частота, $\mathbf{k}$ – волновой вектор), традиционным способом из системы уравнений (1) получим дисперсионное уравнение [*McLellan and Winterberg,* 1968; *Хантадзе и др.*, 2007]:

$$\left(\omega^2-\omega_A^2\cos^2\vartheta\right)\left\{\omega^4-\omega^2\left[\omega_A^2+c_s^2k\left(k-i\cos\varphi/H\right)\right]+N^2\omega_s^2\sin^2\varphi+\omega_A^2c_s^2k\cos\vartheta\left(k\cos\vartheta-i\cos\eta/H\right)\right\}=0\ . \qquad (2)$$

Здесь $\omega_A^2=k^2V_A^2$, $\omega_s^2=k^2c_s^2$, $N^2=\left(g^2/c_s^2+\left(g/\rho\right)\partial\rho/z\right)=g\left(1-1/\gamma\right)/H=\left(g^2/c_s^2\right)\!\left(\gamma-1\right)$,– квадраты частот МГД волн, звука и Брента-Вяйсяля соответственно; $V_A^2=B_0^2/4\pi\rho_0$ – квадрат альвеновской скорости, φ – угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{g}$, η – угол между геомагнитным полем $\mathbf{B_0}$ и $\mathbf{g}$, ϑ – угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B_0}$.

Дисперсионное уравнение (2) представляет собой два независимых дисперсионных соотношения. Первое из них (выражение в круглых скобках) описывает распространение в ионосфере поперечных волн Альвена. Эти волны достаточно хорошо изучены [*Альвен и Фельтхаммар*, 1967].

Дисперсионное соотношение, представленное в фигурных скобках, является уравнением второго порядка относительно ω^2. Это означает, что имеется два корня для ω^2, соответствующих двум различным модам распространения магнитогидродинамических волн. Так как уравнение содержит мнимые слагаемые, то корни его будут комплексными величинами, что означает существование волн с экспоненциально нарастающей или убывающей амплитудой. Вещественные слагаемые дисперсионного уравнения определяют спектр частот собственных колебаний среды, а мнимая часть совместно с вещественной частью позволяет найти декремент затухания или инкремент нарастания соответствующих колебаний.

Непосредственный анализ (2) довольно трудная задача, поэтому это уравнение необходимо привести к более простому виду. Для этого воспользуемся системой прямоугольных координат, в которой волновой вектор имеет только две составляющие k_x и k_z, при этом общность вывода не теряется. Вращая систему координат вокруг оси y по часовой стрелке на угол η и учитывая формулы преобразования $k_x=k_x'\cos\eta-k_z'\sin\eta$, $k_z=k_x'\sin\eta+k_z'\cos\eta$ и связь между углами $\vartheta=\varphi-\eta$, получим:

$$k\left(k-i\cos\varphi/H\right)=\widetilde{k}_x'^2+\widetilde{k}_z'^2+1/4H^2\ , \qquad k\cos\vartheta\left(k\cos\vartheta-i\cos\eta/H\right)=\widetilde{k}_z'^2+\cos^2\eta/4H^2\ ,$$

$$k_x=\widetilde{k}_x'\cos\eta-\widetilde{k}_z'\sin\eta\ , \qquad k_z=\widetilde{k}_x'\sin\eta+\widetilde{k}_z'\cos\eta-i/2H\ , \qquad (3)$$

где $\widetilde{k}_x'=k_x'+i\sin\eta/2H$ и $\widetilde{k}_z'=k_z'+i\cos\eta/2H$; k_x' и k_z' – компоненты волнового вектора в системе координат $\left(x',y,z'\right)$, повёрнутой на угол η; $\widetilde{k}_x'$ и $\widetilde{k}_z'$ – действительные волновые числа в той же системе координат.

Подставляя (3) в (2) и возвращаясь в исходную систему координат $\left(x,y,z\right)$, после несложных преобразований дисперсионное уравнение для МАГВ волн представим в виде суммы вещественной и мнимой частей:

$$\Lambda\left(\omega,\mathbf{k}\right)=\mathrm{Re}\,\Lambda\left(\omega,\mathbf{k}\right)+i\,\mathrm{Im}\,\Lambda\left(\omega,\mathbf{k}\right)=0\ , \qquad (4)$$

где

$$\mathrm{Re}\,\Lambda\left(\omega,\mathbf{k}\right)=\omega^4-\omega^2\left(\omega_A^2+\omega_s^2+N_a^2-N_A^2\right)+N^2\omega_s^2\sin^2\varphi+\left(\omega_A^2-N_A^2\right)\!\left(\omega_s^2\cos^2\vartheta+N_a^2\cos^2\eta\right),$$
$$\mathrm{Im}\,\Lambda\left(\omega,\mathbf{k}\right)=-k\cos\varphi\,V_A^2\left(\omega^2-\omega_s^2\cos^2\vartheta-N_a^2\cos^2\eta\right)/H\ , \qquad (5)$$

$N_a=c_s/2H$ – предельная акустическая частота, $N_A=V_A/2H$ – предельная альвеновская частота, k - вещественное волновое число. При этом амплитуда возмущений определяется следующим выражением: $\Phi=\exp\left(z/2H\right)\exp i\left(\mathbf{kr}-\omega t\right)$, т.е. возрастает с увеличением высоты z. Здесь и ниже знак ~ над $\mathbf{k}$ опущен.

Из мнимого слагаемого уравнения (4) следует, что в земной изотермической атмосфере волновые возмущения в горизонтальном направлении ($\mathbf{k}\perp\mathbf{g}$) распространяются без затухания. В других направлениях совместное действие магнитного поля ($V_A\neq 0$) и гравитации ($g\neq 0$) приводит к появлению бесстолкновительного затухания МГД волн. При этом звуковая мода распространяется без затухания.

Если магнитное поле отсутствует, то $V_A=0$ и (4) переходит в уравнение для акустико-гравитационных волн (АГВ) [*Хайнс*, 1975]: $\omega^4-\omega^2\left(\omega_s^2+N_A^2\right)+N^2\omega_s^2\sin^2\varphi=0$. Если отсутствует гравитация, то $N=N_a=N_A=0$ и (4) становится дисперсионным уравнением для магнитозвуковых волн [*Альвен и Фельтхаммар*, 1967]: $\omega^4-\omega^2\left(\omega_A^2+\omega_s^2\right)+\omega_A^2\omega_s^2\cos^2\vartheta=0$.

Используя выражение (5), получим формулы для фазовой $\mathbf{v}_{\mathbf{ф}}$ и групповой $\mathbf{v}_{\mathbf{гр}}$ скоростей магнитогидродинамических волн:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{ф}} = \left(\omega/k^2\right)\mathbf{k} = \left[\frac{c_s^2\left(\omega^2 - N^2\sin^2\varphi\right) + \widetilde{V}_A^2\left(\omega^2 - \omega_s^2\cos^2\vartheta - N_a^2\cos^2\eta\right)}{\omega^2 - N_a^2}\right]^{1/2}\frac{\mathbf{k}}{k},$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{гр}} = \partial\omega/\partial\mathbf{k} = \frac{\left[\omega^2\left(\widetilde{V}_A^2 + c_s^2\right) - \widetilde{V}_A^2\left(2\omega_s^2\cos^2\vartheta + N_a^2\cos^2\eta\right)\right]\mathbf{k} - N^2c_s^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{e}}{\omega\left(2\omega^2 - \omega_A^2 - \omega_s^2 - N_a^2 + N_A^2\right)}, \quad (6)$$

где $\widetilde{V}_A^2 = V_A^2\left(1 - 1/4k^2H^2\right)$, $\mathbf{e}$ – единичный вектор в горизонтальном направлении.

Видно, что волны, кроме частотной дисперсии, имеют и пространственную дисперсию (направления фазовой и групповой скоростей различны).

3. Фазовые поляры

Дисперсионное уравнение (5), выраженное через фазовую скорость МГД волн $v_\phi = \omega/k$, можно представить в виде

$$v_\phi^4 - v_{ma}^2 v_\phi^2 + v_{ma}^2 v_{mag}^2 = 0, \quad (7)$$

где

$$v_{ma}^2 = c_s^2\left(1 + 1/4k^2H^2\right) + \widetilde{V}_A^2, \qquad v_{mag}^2 = \left\{c_s^2N^2\sin^2\varphi/k^2 + c_s^2\widetilde{V}_A^2\left(\cos^2\vartheta + \cos^2\eta/4k^2H^2\right)\right\}/v_{ma}^2 \quad (8)$$

Решая его относительно фазовой скорости, найдём $v_{\phi 1,2}^2 = \dfrac{1}{2}v_{ma}^2\left(1 \pm \sqrt{1 - 4v_{mag}^2/v_{ma}^2}\right)$, где знак "плюс" соответствует ускоренным магнитогидродинамическим волнам, а знак "минус" – замедленным волнам.

В частном случае $k = 1/(2H)$, т.е. $\widetilde{V}_A = 0$, соотношение (7) переходит в дисперсионное уравнение для АГВ, фазовая скорость которых определяется выражением: $v_{\phi 1,2} = c_s\left[1 \pm \sqrt{1 - 4(\gamma - 1)\sin^2\varphi/\gamma^2}\right]^{1/2}$.

Видно, что фазовая скорость волн, возбуждаемых в атмосфере, зависит от скорости звука c_s, отношения удельных теплоемкостей γ и от угла между волновым вектором и силой тяжести φ. В свою очередь скорость звука зависит от температуры и массы молекул воздуха. Указанные параметры изменяются с высотой за счет изменения химического состава атмосферы. Так отношение теплоемкостей для области D ионосферы $\gamma = 1.4$, а в областях E и F значения γ соответственно будут равны 5/3 и 2.

Зависимости безразмерных скоростей $V_{н1,2} = V_{\phi 1,2}/c_s$ от угла φ между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{g}$ (фазовые поляры) представлена на рис. 1 для трёх значений отношения удельных теплоемкостей $\gamma = 1.4$, 5/3 и 2. Направление силы тяжести совпадает с осью абсцисс. Цифры около окружностей показывают значения безразмерной скорости.

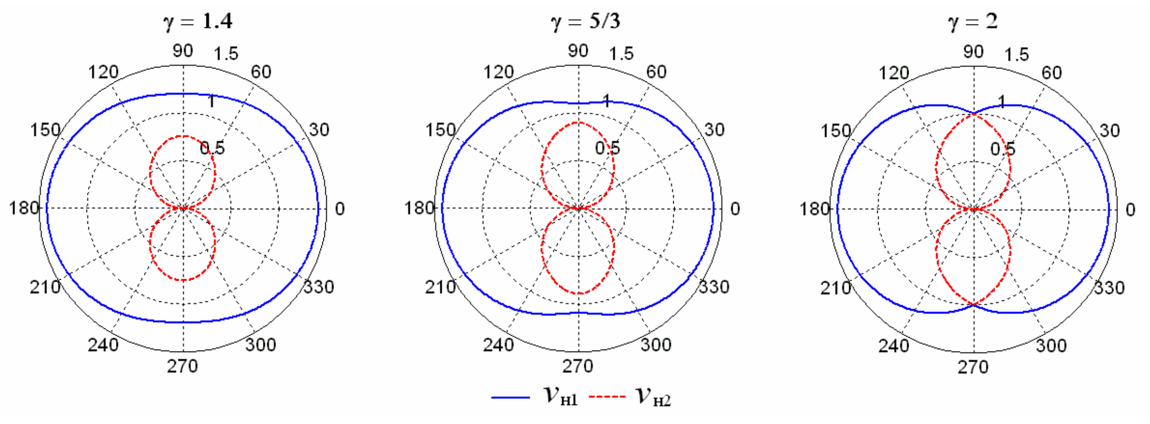

Рис. 1 Фазовые поляры для быстрой акустической (сплошная кривая) и медленной гравитационной (штриховая кривая) волн

Отметим, как непосредственно следует из формулы для $V_{\Phi 1,2}$, при $0 \le \varphi \le \pi/2$ фазовая скорость быстрой акустической волны является убывающей функцией φ, а фазовая скорость медленной гравитационной волны – возрастающей функцией φ, причем при $\varphi = 0$ фазовая скорость гравитационной волны равна нулю. При $\gamma = 2$ обе волны распространяются со скоростью звука в направлении, поперечном к силе тяжести.

Рис. 2 показывает фазовые диаграммы для магнито-акустико-гравитационных волн, которые могут возбуждаться в Е-области ионосферы на высоких широтах и геомагнитном экваторе.

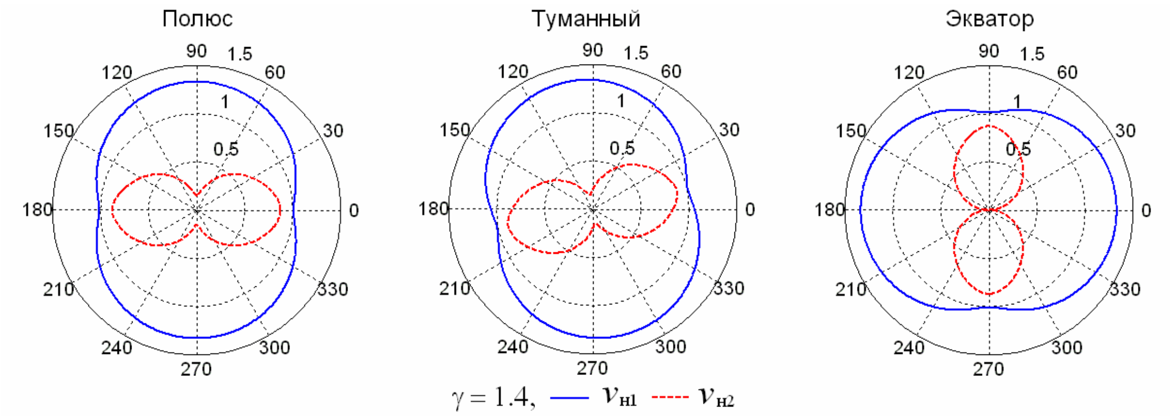

Рис. 2 То же, что и на рисунке 1, на высоте 130 км над геомагнитным полюсом, над Туманным и экватором

Из рисунка видно, что фазовые скорости рассматриваемых волн зависят от геомагнитных координат точки наблюдения, направления распространения волны и от гравитации. Наиболее сильно гравитация влияет на замедленные волны. Дисперсионное уравнение (7) даёт следующие выражения для фазовой скорости замедленных волн: при распространении поперёк **q** над полюсом $v_{\phi 2}^2 = c_s^2\left(N^2 + N_A^2\right)/\left(\omega_s^2 + \omega A^2\right)$ и над экватором $v_{\phi 2}^2 = c_s^2\left(N^2 + \omega_A^2\right)/\left(\omega_s^2 + \omega_A^2\right)$. На промежуточных широтах при распространении вдоль магнитного поля $\mathbf{B}_0$ возникают замедленные волны с фазовой скоростью $v_{\phi 2}^2 = c_s^2\left(N^2 \sin^2\varphi + \omega_A^2\right)/\left(\omega_s^2 + \omega_A^2\right)$, а при поперечном распространении с фазовой скоростью $v_{\phi 2}^2 = c_s^2\left(N^2 + \omega_A^2\right)\sin^2\varphi \,/\left(\omega_s^2 + \omega_A^2\right)$. При отсутствии силы тяжести такие смешанные МГД волны не существуют.

4. Выводы

На основе решения уравнений магнитной гидродинамики получено локальное дисперсионное соотношение для собственных низкочастотных колебаний частично ионизованного газа, находящегося в магнитном и гравитационном полях. Показано, что совместное действие магнитного поля и гравитации приводит к появлению бесстолкновительного затухания МГД волн, распространяющихся в направлениях, отличных от ортогонального направления к гравитационному полю. При этом возбуждаются новые типы смешанных МГД волн, скорости распространения которых зависят от ускорения силы тяжести.

Построены поляры и определены частоты, фазовые и групповые скорости атмосферных волн при произвольной ориентации волнового вектора, силы тяжести и магнитного поля. Показано, что тип низкочастотных колебаний возбуждаемых и распространяющихся в атмосфере Земли, зависит от геомагнитных координат точки наблюдения и направления распространения волны.

Список литературы

Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г. Космическая электродинамика. – М.: Мир, 1967. – 260 с.

Госсард Э.Э., Хук У.Х. Волны в атмосфере. – М.: Мир, 1978. – 532 с.

Хайнс К.О. Атмосферные гравитационные волны (обзор) // Термосферная циркуляция. – М.: Мир, 1975. – С. 85-99.

Хантадзе А.Г., Гвелесиани А.И., Джандиери Г.В. Малые колебания верхней атмосферы Земли // Радиофизика и радиоастрономия. – 2007. – Т. 12, №3.– С. 261-277.

McLellan N.A., Winterberg F. Magneto-gravity waves and the heating of the Solar corona // Solar Phys. – 1968. – V. 4, N4. – P. 401-408.

Zhugzhda Y.D., Dzhalilov N.S. Magneto-acoustic-gravity waves on the Sun. I. Exact solution for an oblique magnetic field // Astron. Astrophys. – 1984. – V. 132. – P. 45-51.